A coordináta elv történeti fejlődése.

Az exakt tudományok terén kutató elme nagy vívmányainak egyike az a fölfedezés, hogy a számvetés és a tér alapelemei között szoros kapcsolat van.

Kétségtelen, hogy nagy jelentőségű volt ama fontos ténynek igazi kiderítése, hogy az algebrai műveletek révén nyert eredményeket geometriailag lehet interpretálni; viszont a síknak és a térnek alakzatait (idomait) algebrai úton lehet kifejezni.

Kiderült, hogy a térelemek kölcsönös helyzeteit, továbbá az elemekkel a térben végrehajtható műveleteket (operatiókat) algebrai úton is érthetővé lehet tenni.

A mondottak értelmezésére és megvilágítására szolgáljanak a következők:

Tudjuk, hogy a síkban a planimetria alapelemeivel nagyon könnyen elbánhatunk, mert a síkban körzővel és vonalzóval közvetetlenül szerkeszthetünk. Másképpen van a dolog a térben.

A pont, az egyenes és a sík kölcsönös helyzeteit csak elképzeljük és az ezekre vonatkozó feladatokat rendszerint csak a képzeletben oldjuk meg. Ha pedig grafikailag akarjuk szemlélhetőkké tenni, akkor a constructiók a legtöbb esetben nehezek és teljes pontossággal csak az ábrázoló geometria elvei alapján hajthatók végre.

Mekkora előnyt nyújtott, minő kényelmes utat mutatott tehát az új felfedezés, mely a szerkesztést fölöslegessé tette, a mennyiben algebrai kifejezések összetételéből biztos következtetést vonhatunk a térre.

Természetes, hogy a fölfedezett új módszert másképpen és sokkal megfelelőbb módon is jellemezhetnők, hiszen a módszernek egyéb értéke is van és más irányban is nagy hasznát vették. A fönti hasonlatot csak azért választottam, mert – e folyóirat szabta határokon belül – vele a fölfedezés lényegét a legkönnyebben érthető módon megvilágosíthatni vélem.

Hogy a tér alakzatai és a számvetés között ilyen szoros kapcsolat van, a tudósok csak lassan és fokozatosan derítették ki, é. p. azon mértékben, a minőben a *coordinátá*kra nagyobb és nagyobb súlyt helyeztek. Itt tehát nem oly fölfedezésről van szó, mely ötletszerűen támad, vagy a melyre a véletlen vezet, hanem ez esetben a ténynek kiderítése gondosan elő volt készítve. – Megtörténtnek tekinthettük a fölfedezést, más szóval bizonyossá vált a dolog, a mikor a tudósok belátták, hogy a coordinatákat nem szabad egyszerűen csak segédeszközöknek tekinteni, mert a coordináta fogalomnak nagyobb jelentősége, a coordináta elvnek mélyebbre ható értéke és értelme van.

Habár nem mondhatjuk, hogy ez a fölfedezés kizárólag egyetlenegy lángelméjű tudós agyvelejének szüleménye, mind a mellett e vívmányt joggal *Descartes*-nak (Des Cartes, Cartesius 1596–1650), a XVII. század legnagyobb franczia bölcsészének nevéhez fűzhetjük.

Descartes megalapítója a tulajdonképpeni coordináta számításnak. A Descartes-, vagy a mint mondani szoktuk, Cartesius-féle rendszer módot nyújt a sík- és a térgeometria magasabb problemáinak algebrai úton való megfejtésére és ama rendszeren épült föl az az önálló szép disciplina, melyet ma *analytikai geometriának* nevezünk.

Jelenleg a Cartesius-féle rendszeren kívül más rendszereket is ismerünk. A legújabb kor hírneves tudósai ugyanis a coordináta elv tökéletesítésén fáradozván, a fölött elmélkedtek, vajjon nem lehetne-e a Cartesius-féle rendszerhez hasonló és bizonyos szempontból talán még tökéletesebb rendszereket fölállítani?

Fáradozásukat nagy siker koronázta!

Czikksorozat alakjában ismertetni szándékozom a különböző, illetőleg a leggyakrabban használt coordináta rendszerek elemeit. Nagyobb tájékoztatás kedvéért azonban a sorozatot azzal kezdem, hogy futó pillantást vetek a coordináta elv történeti fejlődésére.

———

A coordináta elv fejlődésében több stádiumot különböztetünk meg. *Günther S.* dr. egyik dolgozatában hármat jelöl meg. Ha ama háromhoz azonban a legújabb kor vívmányait számítjuk, akkor tulajdonképpen négy fejlődés-stádiumunk van.

Ősrégi időben leljük első nyomait a coordináták alkalmazásának. Már az egyiptomiak, majd görögök használtak elvétve coordinátákat. A görögök tiszta mathematikájában ugyan mi sem emlékeztet coordináta-számításra, de az alkalmazott mathematikában, csillagászatban, már találkozunk vele. A coordináta elv fejlődésének *első* stádiuma ez. Az első stádiumban csak odáig haladtak, hogy a síknak különböző pontjait két adott, vagy tetszés szerint fölvett egyenesre vonatkoztatták.

Időszámításunk X. századában kis haladás történt. A haladás még mindig a csillagászat fejlődésével kapcsolatos. Abban az időben megtörténtek az első kísérletek pontosabb csillagászati térképek szerkesztésére, a mi főképpen abban állt, hogy nemcsak az égbolton észlelt csillagokat, hanem egyúttal a bolygóknak pályáit is a síkban ábrázolni iparkodtak. Az eljárás fölötte primitív volt. Az éggömbnek egy részét ugyanis a síkban kiterítve képzelték és úgy is ábrázolták; azt a csillagot pedig, melynek az égen szélességét és hosszúságát meghatározták, a síkban két egymást derékszög alatt metsző egyenesre vonatkoztatták és a csillagnak útját (térbeli görbéjét) a derékszöget alkotó egyenesek közé, mint sík-görbét rajzolták.

Ezzel kezdődik a coordináta elv fejlődésének *második* stádiuma. Ama stádium igen sokáig tartott. Benne elérkeztek ugyan már a coordináták között ábrázolt görbe vonal fogalmához, a görbét azonban még nagyon egyszerű módon alakították. A meghatározás abban állt, hogy minden abscissához meghatározták a hozzátartozó ordinátát és az olymódon nyert pontokat görbe vonallal összekapcsolták. Az elv fejlődésének ama fokán a tudósok előtt a különböző görbe vonalak törvényszerűségei még teljesen ismeretlenek voltak.

Kissé újabb lendületet hozott a XIV. század. *Oresme Nicole* (1320–1382), nemkülönben a renaissance korszaknak néhány mathematikusa, úgy szintén későbben az arabok a coordináta fogalmat kissé általánosították, a módszert pedig annyira tökéletesítették, hogy nagyban egyengették az utat a harmadik stádiumba való átmenetelre.

Egészen új jelentősége lett a coordinátáknak a fejlődés *harmadik* stádiumában. Az ama stádium, melyben a coordináta principium épülete a *Descartes*-féle rendszer fölállításával betetőzését nyerte.

A harmadik stádiumot a következő jellemzi: Azokat az egyenleteket, melyek két változó mennyiséget (két ismeretlent, x-et és y-t) tartalmaznak, 0-ra reducált alakban általában így írhatjuk: $f(x, y) = 0$.

Az $f(x, y) = 0$ egyenlet határozatlan egyenlet.

Sem x-et, sem y-t meg nem határozza ugyan, de ha x-nek egy bizonyos x_0 értéket adunk, ezzel y-nak bizonyos y_0 értéke meg van határozva. Az y_0 értéket ugyanis az $f(x, y) = 0$ egyenlet szolgáltatja.

Az x_0 és y_0 együvé tartozó értékeket lehet geometriailag is szemlélhetővé tenni, ha valamely a síkban fölvett derékszögű coordináta rendszerre vonatkoztatjuk. Egy mértékül szolgáló egység segítségével, és a positív vagy negatív irány tekintetbevételével meghatározhatjuk a síkban azt a *pontot*, mely x_0 és y_0-nak megfelel.

Ha x-nek egymásután $+\infty$-től $-\infty$-ig az összesen képzelhető reális értékeket tulajdonítjuk, akkor y-nak is éppen annyi és rendszerint egymástól különböző érték felel meg. Geometriailag értelmezvén a dolgot, mondhatjuk, hogy ebben az esetben a síknak bizonyos pontja *vonalat* ír le.

A vonal lehet *egyenes* vagy *görbe*. Ha az $f(x, y) = 0$ egyenlet baloldalán álló kifejezés x-nek és y-nak *első fokú* rationalis egész függvénye (első fokú egyenlet), akkor az egyenlet egyenes vonalat képvisel. Ha pedig az $f(x, y) = 0$ egyenlet *másod-, harmad-*, vagy *magasabb fokú*, akkor a vonal *görbe*.

A coordináta elv fejlődésének harmadik stádiumában tehát végre teljesen bizonyossá vált, hogy az összefüggés, mely két reális érték között (x és y között) van, kétféle módon találhat kifejezést. Algebrailag az $f(x, y) = 0$ egyenlet, geometriailag pedig a coordináták között elterülő vonal által. Kiderült továbbá (és az a fődolog), hogy mindazok a tételek, melyek az $f(x, y) = 0$ egyenletből algebrai úton levezethetők, egyúttal a vonalaknak (görbéknek) geometriai tételei. Viszont, mindama tételek, melyek geometriai következtetéseknek eredményei, melyeket megtalálunk, ha a vonalakkal constructiv úton foglalkozunk (nevezetesen a görbe vonalok tulajdonságai), egyúttal az $f(x, y) = 0$ egyenletnek algebrai tételei.

Ez csekélynek látszó, de nagy jelentőségű felfedezés volt. Módot nyújtott olyan feladatok megfejtésére, melyeket mindaddig meg nem oldhatóknak tartottak, mert megoldásaikat más úton hiába keresték.

Ennek kiderítése a XVI., illetőleg XVII. század három franczia mathematikusának, t. i. *Vietá*-nak (1540–1603), *Fermat*-nak (1590–1663) és *Descartes*-nak (1596–1650) az érdeme.

Descartes-sal egyidejűleg, de tőle teljesen függetlenül *Fermat* a coordináta fogalmat az infinitesimális számítás és az elméleti physika keretébe eső dolgozataiban teljes czéltudatossággal a legszélesebb körben érvényesítette. Ezért lehetne *Fermát*-t bátran az új analysis föltalálójának tekinteni.

A babért még sem Fermat-nak, hanem *Descartes*-nak ítélte oda a világ!

Ez azért történt, mert Descartes 1637-ben a tudós világot olyan munkával lepte meg, melyben a coordináta fogalom igazi értékét föltárta, melyben a *coordináta-tan* alapelveit teljesen rendszerbe foglalva egész nagyszerűségében kifejtette.

Rendszerével Descartes a mathematika terén nagy forradalmat idézett elő. A tudósok igen sokáig csakis az általa megjelölt úton haladtak. Bekövetkezett az az idő, melyben – mint egy tudós jellemzően mondja – "mindenki számolt és senkisem construált".

Descartes művében a *sík analytikai geometriáját* mutatta be. Módszerét csak két coordinátára vonatkozólag fejtette ki és vele a sík-görbék tulajdonságai ismeretesek lettek. Munkája azonban a tudósokat módszerének általánosítására serkentette. Buzdította őket a térgörbék és a felületek tulajdonságainak kipuhatolására. Mindez megvalósult, midőn kimutatni sikerült, hogy az $f(x,\ y,\ z) = 0$ egyenlet felületnek az egyenlete, melynek pontjait három coordináta síkra vonatkoztatjuk. Descartes utódai tehát kifejtették a *tér analytikai geometriáját.*

Azt hihetnők, hogy a coordináta elv valódi értékének kiderítésével a coordináta fogalom fejlődésének fokozatos sorozata be van fejezve. Hihetnők, mert ezzel a dolog lényege csakugyan kiderült és könnyen gondolhatnók, hogy a haladás, mely e téren a legújabb korban észlelhető, nem egyéb mint értékesítése és természetes következménye a fölfedezésnek. – Tévedünk, ha így okoskodunk, habár okoskodásunk részben igaz is.

Van az elv fejlődésének még egy *negyedik* és a jelen korig utolsó stádiuma.

A legújabb korban hírneves tudósok megmutatták, hogy az analysis és a geometria között levő kapcsolat nemcsak a Cartesius-féle rendszerben, hanem még sokféleképpen találhat kifejezést.

Kiderítették, hogy a mint a Cartesius-féle rendszer néhány alapgondolatból kiindulva a maga elvein fölépült, éppen úgy fölépíthetünk más rendszereket is, ha más-más alapeszmékből indulunk ki. Kiderítették, hogy fölállíthatók olyan teljes rendszerek, melyek még általánosabbak mint a Cartesius-féle rendszer, melyekben a számítások egyszerűbbek és elegánsabbak, melyek alapján mélyebb betekintést nyerhetünk a mathematika titkaiba. Sőt kimutatták, hogy a Cartesius-féle rendszer, az általuk kifejtett általánosabb rendszereknek csak speciális esete és hogy az általánosabb rendszerekre vonatkozó eredményekből, egyszerű transformatiók segítségével a Cartesius-féle rendszer nyomán elért eredményeket bármikor megtalálhatjuk.

Ilyen rendszereket *Möbius* (1790–1868) és *Plücker* (1801–1868) német tudósoktól bírunk. Möbius megmutatta, hogy valamely pontrendszernek (pontokból alkotott idomnak) a *súlypontja* kiinduló eszméje lehet egy új és érdekes számító módszernek. Ő fedezte föl az úgynevezett *súlypont*-(barycentrikus) coordináta rendszert.

Plücker felfedezéséről kissé bajos e helyen szólani. A mathematikai kutatások e tere a középiskolai anyagot messze túlhaladja. Mind a mellett a dolog lényegéről legalább némi kis fogalmat alkothatunk magunknak, ha a fölfedezés jellemzésére részben Loria Ginonak könnyen érthető eszmemenetét követjük.

A görögök geometriájában (az Euklides-féle geometriában) a *pont* az idomokat alkotó alapelem. A Cartesius-féle analytikai geometriában (a sík- és térgeometriában) a *pont* szolgál alapul az összes számításoknak. – A tudósok idővel kiderítették, hogy a síkban (a planimetriában) az *egyenest* is éppen olyan joggal lehet az idomok alkotó eleméűl tekinteni, mint a pontot. Kiderítették továbbá, hogy a térben (a stereometriában) pedig a *síkot* lehet éppen úgy mint a pontot alkotó elemnek tekinteni. Geometriai műnyelven e körülményről azt szoktuk mondani, hogy a síkban a *pont*nak *dualis* eleme az *egyenes*: a térben pedig a *pont*nak dualis eleme a sík. Az egészet a dualitás elvének mondjuk.

E fontos körülmény értékét Plücker teljesen ismerte és részben az ő érdeme is, hogy olyan rendszereket eszeltek ki, melyekben a síkban az *egyenes* vonal; a térben pedig a *sík* az idomokat alkotó elemek.

Egyes-egyedül az ő érdeme azonban ama ténynek a kiderítése, hogy a térben is ugyanazt a szerepet viszi az *egyenes vonal* is, mint akár a pont, akár a sík. Plücker egészen új alapon nyugvó – a dualitás elvétől kevéssé érintett – rendszernek megalapítója. Ő teremtette meg az *egyenes vonal analytikai geometriáját.*

Ne higyjük azonban, hogy a legújabb kor vívmányai ezért csorbát ejtenek Descartes érdemén. Descartes rendszere olyan alkotás, melyet mint úttörőt mindenkor tisztelni és bámulni fognak. Éppen úgy, mint a hogy Plücker rendszerét jelenleg csodáljuk.

A coordináta elv fejlődésének negyedik, és a jelen korig utolsó stádiuma tehát az új alapeszmékből kiinduló rendszerek alakításának stádiuma.