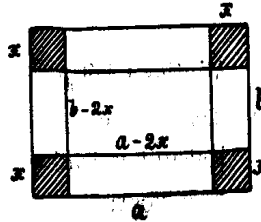


40. *Grillet módszere.* Mikor a változókat korlátozó feltételek nem engedték meg a változók egyenlőkké válását, módját adtuk annak, miképpen lehet a nehézséget megkerülni. A tételt több pozitív változó esetére általánosítván, főlemlítettük, hogy a változókat korlátozó feltételek némely esetben nem engedvén meg azt, hogy a változók egyenlőkké válhassanak, a módszer általános érvényességének is korlátokat szabnak. Ilyen esetekben *Grillet* (Nouvelles Annales de Mathematiques I. série 1. IX. et XVI.) útmutatása szerint kerülhetjük meg a nehézséget. A módszert egy érdekes feladat megoldására fogjuk felhasználni.

41. *Téglalapalakú kartonlapból a legnagyobb térfogatú, felül nyitott skatulya készítenőd.*

A téglalap sarkaiból x oldalú négyzeteket vágunk ki.



A skatulya köbtartalma

$$V = x \cdot (a - 2x) \cdot (b - 2x).$$

Ebben az esetben a tényezők nem válhatnak egyenlőkké; mert például

$$a - 2x = b - 2x$$

arra vezetne, hogy $a = b$, a mi a föltevással ellenkezik. A paraméteres eljárás sem vezetne célhoz, amennyiben a megoldandó egyenlet 3-adsfokú lenne.

Grillet szerint a szorzat két utolsó tényezőjét tetszésünktől függő constans együtthatókkal megszorozzuk:

$$x(\alpha a - 2\alpha x) \cdot (\beta b - 2\beta x).$$

A tényezők összege

$$\begin{aligned} & x + \alpha a - 2\alpha x + \beta b - 2\beta x \\ &= x(1 - 2\alpha - 2\beta) + \alpha a + \beta b, \end{aligned}$$

akkor lesz állandó értékű, vagyis x -től független, ha

$$1 - 2\alpha - 2\beta = 0.$$

De ebben az esetben a szorzat akkor válik maximálissá, ha a tényezők egyenlők; tehát

$$x = \alpha(a - 2x) = \beta(b - 2x).$$

Mint hogy $\alpha \neq \beta$, ebből most már nem következik az, hogy $a = b$. Ezekből az egyenletekből

$$\alpha = \frac{x}{a - 2x}$$

$$\beta = \frac{x}{b - 2x}$$

következik, melyeket helyettesítvén

$$1 - \frac{2x}{a - 2x} - \frac{2x}{b - 2x} = 0$$

származnak, vagy rendezve:

$$12x^2 - 4x(a + b) + ab = 0,$$

honnét

$$x = \frac{a + b \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}.$$

Mint hogy két pozitív értéket kaptunk, most még el kell döntenünk azt, hogy ezek közül melyik felel meg a feladat követelményeinek. Rajzunk szerint $a > b$.

Ennélfogva

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2}$$

abszolút értéke b -nél nagyobb, s így a nagyobbik gyök $\frac{b}{2}$ -nél nagyobb értékű. Ez azonban lehetetlen, mert az elvágandó négyzet oldalhosszúsága a téglalap kisebbik oldalának felénél hosszabb nem lehet.

Így tehát

$$x = \frac{a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}.$$

42. *A maximum-minimum feladatok reciprocitása.* Legyenek X és Y pozitív változó mennyiségek, melyek közt meghatározott összefüggés álljon fenn. Ha Y -nak bizonyos adott B értékére nézve X -nek A a maximuma, akkor ugyanazon körülmények között X -nek A értékére nézve Y -nak B lesz a minimuma. Hogy ez lehetséges legyen, ahhoz csupán az szükséges, hogy X -nek lehetséges maximuma Y -nal egyidejűleg csökkenhessen.

Ugyanis, ha Y -nak egy a B -nél kisebb b értéket adunk, akkor X -nek értéke a föltevés szerint A -nál kisebb lesz. Tehát ha X -nek ez A értéket adjuk, akkor Y -nak egyidejűleg bekövetkező összes értékei közül egy sem lehet B -nél kisebb, s így B lesz az Y -nak minimuma.

Ez a megjegyzés megengedi azt, hogy bizonyos esetekben a maximum-minimum feladatok kétféleképpen tárgyalhatassanak. Minden maximum-, vagy minimum feladatnak így illetőlegesen egy minimum- vagy maximum feladat felel meg. Ennek alapján néhány nevezetes eredményt fogunk felsorolni.

Láttuk, hogy ha n pozitív tényezőnek összege állandó, szorzatuk maximumát éri, ha a tényezők egymás közt egyenlők, tehát egy-egy az összegüknek n -ed részévé válik.

Közvetlenül világos, hogy ha n pozitív tényezőnek szorzata állandó, akkor összegük minimumát éri, a mikor a tényezők egymás közt egyenlőkké válnak, s mindegyik a szorzatuknak n -ik gyökével lesz egyenlővé.

Továbbá láttuk, hogy ha n pozitív változó összege állandó, akkor az

$$x^p \cdot y^q \cdot z^r \cdots t^v$$

szorzat maximumát az esetben éri, a mikor a tényezők rendre arányosak megfelelő kitevőkkel.

A megelőzők alapján közvetlenül világos, hogy ha az

$$x^p \cdot y^q \cdot z^r \cdots t^v$$

szorzat állandó, akkor az $x, y, z \dots t$ pozitív változók összege minimumát éri az esetben, a mikor a tényezők megfelelő kitevőkkel arányosak.

Láttuk, hogy az adott forgás kúpba írt henger térfogata akkor maximális, a mikor a henger magassága a kúp magasságának harmadrésze, vagy a henger alapkörének küllője $\frac{2}{3}$ -a a kúp alapköre küllőjének. E mellett a maximális henger köbtartalma az adott kúp köbtartalmával egyidejűleg csökkenik.

Megjegyzéseink alapján kimondhatjuk, hogy az adott körhenger körül írt forgáskúp köbtartalma akkor minimális, amikor a kúp magassága a henger magasságának 3-szorosa.

43. Mielőtt a tollat letenném, kötelességem forrásaimról (a mennyiben azt a tárgyalások folyamán meg nem tettem volna) beszámolni. E tekintetben első sorban említem *Charles de Comberousse: Cours de mathématiques I. kötetét*, továbbá *F. J.-nek Cours. d'algebre élémentaire conforme aux derniers programmes* című munkáját.

Abban a hitben, hogy minden a kérdésre vonatkozót áttekinthetőleg összefoglaltam, s hogy ezzel a mennyiségtan iránt érdeklődő fiatalságunknak szolgálatot tettem, a hűségesen eddig kitartott szíves olvasó figyelméért köszönetet mondva, zárom soraimat.