V.

23. *Schellbach-féle módszer.* Ezt a sok esetben előnyösen alkalmazható módszert *Maksay Zsigmond* (1850–1896) ismertette a K. M. L. II. kötetében (34. lap); egyszersmind néhány idevaló feladatot (34., 35., 36., 37. és 54. lap) is közölt.

24. A Steiner-féle feladatra még egyszer, más szempontból, visszatérve, azt vizsgáljuk, vajon *két positív változó szorzata, mikor válik maximálissá, ha összegük állandó szám?* Már ott azt találtuk, hogy $x + y = 2a$ feltétel mellett xy akkor maximális, ha $x = y = a$.

Ezt a nevezetes körülményt még egy más úton is igazolhatjuk. Ugyanis, ha

$$x + y = 2a$$

akkor a következő identitás

$$4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2$$

ilyen alakot ölt:

$$4xy = 4a^2 - (x - y)^2$$

honnét

$$xy = a^2 - \left(\frac{x - y}{2}\right)^2.$$

E kifejezés akkor maximális értékű, ha a kivonandó eltűnik, tehát ha $x = y$.

25. *Közös alap fölött álló, egyenlő kerületű háromszögek közül melyiknek területe a legnagyobb?*

Ha a az alap, $2s$ a kerület és b, c a változó oldalak, akkor a terület *Heron* képlete szerint

$$t = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

t^2-nek maximuma ugyanakkor áll elő, a mikor t-é; minthogy

$$s(s - a)$$

állandó mennyiség, ennélfogva a

$$\frac{t^2}{s(s - a)} = (s - b)(s - c)$$

kifejezés maximumát kereshetjük. A jobboldali két tényező összege

$$s - b + s - c = 2s - (b + c) = a$$

állandó mennyiség lévén, tételünk szerint a maximum esete akkor áll be, ha

$$s - b = s - c$$

vagyis, ha

$$b = c.$$

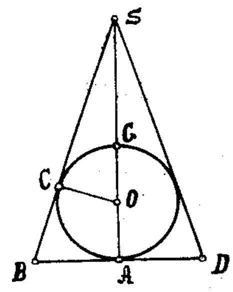
26. *Adott gömb köré minimális térfogatú kúp írandó.* (K. M. L. 155.)

A mellékelt idomot SA mint tengely körül forgatván, egyrészt a gömböt, másrészt a körülírt kúpot kapjuk. Megállapítandó S-nek azon helyzete, melyre nézve a kúp minimális köbtartalmú. Hogy maximumról nem lehet szó, azt közvetlenül belátjuk abból, hogy a G-től távozó S-re nézve a kúp mindinkább közeledik a körülírt hengerhez, ennek térfogata pedig ∞. Ha pedig S mindinkább közeledik G-hez, akkor a kúp alapköre válik ∞-né. Ezen két szélső érték közt kell egy minimumnak feküdnie.

Legyen x a kúp magassága, y az alapkör küllője, R a gömb küllője, akkor a kúp köbtartalma

$$V = \frac{1}{3}\pi y^2 x.$$

Ezt a függvényt korábbi közvetlen módszereinkkel bajos volna tárgyalás alá venni. Ily alakban legutóbbi tételünk sem alkalmazható rá közvetlenül.



$$BAS\triangle \sim OCS\triangle$$

miatt

$$AB : OC = AS : SC$$

vagy

$$y : R = x : \sqrt{x(x-2R)}$$

honnét

$$y^2 = \frac{R^2 x}{x-2R}.$$

Ezt V-nek értékénél tekintetbe véve:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \frac{x^2}{x-2R}.$$

Most már alkalmazhatnók rá a parameteres módszert. Tekintve azt, hogy V kifejezésében csak az

$$\frac{x^2}{x-2R}$$

tényező változó, következésképpen V-nek minimális értéke ezen tényező minimális értékével, vagy a megfordított

$$\frac{x-2R}{x^2}$$

függvény maximális értékével áll be egyidejűleg. Az utóbbi törtszám

$$\frac{1}{x}\left(1-\frac{2R}{x}\right)$$

alakban is írható, vagy pedig identikus átalakítással

$$\frac{1}{2R}\cdot\frac{2R}{x}\left(1-\frac{2R}{x}\right)$$

alakban, s így a térfogat minimális lesz, ha

$$\frac{2R}{x}\left(1-\frac{2R}{x}\right)$$

maximálissá válik. De ebben a szorzatban a tényezők összege

$$\frac{2R}{x}+1-\frac{2R}{x}=1$$

s így állandó, s ezért a maximum esetében

$$\frac{2R}{x}=1-\frac{2R}{x}$$

vagyis

$$x = 4R$$

s így

$$y = R\sqrt{2}$$

s a minimális térfogat

$$V = \frac{8}{3}\pi R^3.$$

Ezzel egyidejűleg a következő feladat is megoldást nyert:

27. *Adott gömb körül minimális felszínnel bíró kúp írandó.*

A gömb körül írt idomok térfogatai ezen idomok felszíneivel arányosak lévén, minthogy a minimális térfogatú kúp és a gömb térfogatai úgy aránylanak egymáshoz, mint $2:1$, már előre tudjuk, hogy a minimális felszínű kúpnak kétszer akkora lesz a felszíne, mint az adott gömbé. A kúp felszíne

$$F = \pi y\sqrt{x^2+y^2} + \pi y^2.$$

A megelőzők szerint

$$y : R = x : \sqrt{x(x-2R)}.$$

$$\frac{y}{R} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x-R}$$

honnét

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y(x-R)}{R}.$$

és

$$y^2 = \frac{R^2 x}{x-2R}.$$

Ezeket a felszín kifejezésébe helyettesítvén

$$F = \frac{\pi y^2(x-R)}{R} + \frac{\pi R^2 x}{x-2R}.$$

A nevezőket eltávolítván

$$FR(x-2R) = \pi y^2(x-R)(x-2R) + \pi R^3 x$$

F-et paraméternek tekintvén, most alkalmazhatjuk a paraméteres módszert. Előbb azonban tekintetbe véve azt, hogy

$$y^2(x-2R) = R^2 x$$

felírhatjuk azt, hogy

$$FR(x-2R) = \pi R^2 x(x-R) + \pi R^3 x$$

s a lehetséges összevonások után:

$$\pi R^2 x - Fx + 2RF = 0$$

x reálitásának föltétele:

$$F^2 - 8\pi R^2 F \geqq 0$$

más szóval

$$F \geqq 8\pi R^2.$$

A minimum esete beáll, ha

$$F = 8\pi R^2;$$

de akkor

$$x = \frac{F}{2\pi R} = 4R$$

mint a megelőző feladatban.

Az eddigiek begyakorlására oldjuk meg a következő feladatokat:

893. (a) Egy R küllőjű körben az átmérőre merőleges húrt húzván, ennek végpontjait összekötjük az átmérő végpontjaival. Mily föltétel mellett lesz a húr, mint közös alap fölött álló két háromszög területeinek különbsége maximális?

(b) Egy állandó kerületű téglalap oldalaira mint átmérőkre a téglalapon kívül fekvő félköröket rajzolunk. Mikor válik az így keletkezett idom területe minimálissá?

(c) Az a oldalú szabályos háromszögbe minimális területű szabályos háromszög írandó.

(d) Egy R sugarú félkör átmérőjén fölveszünk egy pontot. Az így keletkezett szeletek mint átmérők fölött félköröket rajzolunk. Állapítsuk meg annak föltételét, hogy a keletkezett holdacs területe maximálissá váljék, és vizsgáljuk meg, miként változik ez a terület, ha a fölvett pont az átmérőn végig halad?

894. (e) Egy R sugarú körben húzzuk meg azt a húrt, mely a körnek a húrral párhuzamos átmérője körül való forgatása közben maximális felületű hengerpalástot ír le.

895. (f) Egy adott szám úgy bontandó két részre, hogy azon összeg, melynek egyik tagja az első és második rész hányadosa, másik tagja pedig ezen hányados reciprok értéke, minimálissá váljék.

(g) Egy adott szám úgy bontandó két részre, hogy a részek négyzetgyökeinek összege maximális legyen.