16. *Parameteres módszer.* E módszer abban áll, hogy az

$$ax^2 + bx + c$$

függvényt m-mel tesszük egyenlővé, hol m alatt *parametert* fogunk érteni, vagyis oly számot, melynek értékét a követelményekhez képest tetszés szerint megállapíthatjuk. Az $ax^2 + bx + c - m = 0$ egyenletből :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 4am}}{2a}.$$

A független változó reális értékeire szorítkozván, kell, hogy

$$b^2 - 4ac + 4am \geqq 0$$

vagyis positív legyen. Innét

$$4am \geqq 4ac - b^2.$$

Föltéve, hogy a positív, akkor

$$m \geqq \frac{4ac - b^2}{4a}$$

s a vizsgált függvény a $\frac{4ac - b^2}{4a}$ értéknél kisebb értéket nem vehet föl, s így ez lesz a függvény minimális értéke. Ha pedig az a negatív, akkor

$$m \leqq \frac{4ac - b^2}{4a}$$

s a vizsgált függvény a $\frac{4ac - b^2}{4a}$ értéknél nagyobb értéket nem vehet föl, tehát ez a függvény maximális értéke.

Helyettesítsük x-nek kifejezésébe m-nek ezen határértéket, akkor a gyökjel alatti mennyiség zérussá válván, az eminens érték beálltával

$$x = -\frac{b}{2a},$$

mint azt már első módszerünk alapján tudjuk.

E módszer, melynek neve *parameteres módszer*, minden oly esetben alkalmazható, a melyekben az előálló egyenlet általánosságban megoldható. A függvény eminens értékeit közvetlenül megadja ugyan, de a felől, hogy a függvény miként változik, míg a független változó végig halad a reális számok során, felvilágosítást nem nyújt. Hogy implicit egész függvények vizsgálatára mennyiben alkalmas, a következő példa fogja megmutatni:

17. *Mely határok közt változik a*

$$6x^2 - 8xy + 2y^2 + 4x - 5y + 2 = 0$$

egyenletben az y, mialatt az x a reális számok tengelyén halad végig?

$$6x^2 - 2x(4y - 2) + 2y^2 - 5y + 2 = 0$$

$$x = \frac{4y - 2 \pm \sqrt{4y^2 + 14y - 8}}{6}.$$

Hogy x reális értékű legyen, annak feltétele ez:

$$4y^2 + 14y - 8 \geqq 0.$$

A korábbiakból tudjuk, hogy a másodfokú egész függvény abban az esetben, a mikor az a együttható positív, a gyökei közt fekvő intervallumban negatív értékű, különben pedig mindig positív. A

$$4y^2 + 14y - 8 = 0$$

egyenletnek gyökei

$$y_1 = \frac{1}{2} \qquad y_2 = -4$$

s így, ha x a $-\infty \ldots + \infty$ intervallumban változik, akkor y értékei a

$$-\infty \ldots - 4$$

és

$$+\frac{1}{2} \ldots + \infty$$

intervallumokon haladnak végig.

Az adott két ismeretlenes másodfokú egyenlet egy kúpszelet egyenlete; e kúpszeletnek egy az x-tengelyre merőleges helyzetű száron belül pontjai nincsenek, ellenben ettől a szártól két oldalt a végtelenig kiterjed; a kúpszelet tehát hyperbola.

18. *Vizsgáljuk meg az* $\frac{(x-a)(x-b)}{x}$ *függvény eminens értékeit.*

$$\frac{(x-a)(x-b)}{x} = m$$

$$x^2 - x = (a+b+m) + ab = 0$$

$$x = \frac{a+b+m \pm \sqrt{(a+b+m)^2 - 4ab}}{2}.$$

A valós értékek föltétele

$$(a+b+m)^2 - 4ab \geqq 0.$$

Ezt kifejtve

$$m^2 + 2(a+b)m + (a-b)^2 \geqq 0$$

származik. A baloldali trinom gyökei:

$$m_1 = -(a+b) + 2\sqrt{ab}$$

$$m_2 = -(a+b) - 2\sqrt{ab}$$

A minimum $x = \sqrt{ab}$ esetében, a maximum $x = -\sqrt{ab}$ esetében áll elő.

19. A parameteres módszer alkalmas az

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$$

törtfüggvény értékváltozásainak megvizsgálására is. E feladat megoldásával különben már egy, e lapok I. kötetében megjelent értekezés is foglalkozott (1. évf. 35. lap).

20. *A* $2s$ *kerületű derékszögű háromszögek közül melyiknek területe a legnagyobb?*

A háromszög oldalai legyenek : $x,\ y,\ z$. Az utolsó az átfogó.

$$x + y + z = 2s$$

$$xy = 2m^2$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

a feladat meghatározására szolgáló egyenletek.

$$x + y = 2s - z$$

felhasználásával:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 4s - 4s \cdot z + z^2$$

s ha ebből a 3. egyenletet levonjuk, akkor

$$2xy = 4s^2 - 4s \cdot z$$

Ennélfogva

$$4m^2 = 4s^2 - 4s \cdot z$$

honnét

$$z = \frac{s^2 - m^2}{s}.$$

Helyettesítsük ezt az értéket az 1. egyenletbe, akkor

$$x + y = 2s - z = 2s - \frac{s^2 - m^2}{s} = \frac{s^2 + m^2}{s}.$$

Ismervén xy-t és $(x+y)$-t, felállíthatjuk azt a 2. fokú egyenletet, melynek x és y a gyökei; ez pedig

$$\xi^2 - \frac{s^2 + m^2}{s} \cdot \xi + 2m^2 = 0$$

$$\xi = \frac{s^2 + m^2 \pm \sqrt{(s^2+m^2)^2 - 8s^2m^2}}{2s}$$

$$\xi = \frac{s^2 + m^2 \pm \sqrt{(s^2+m^2+2sm\sqrt{2})(s^2+m^2-2sm\sqrt{2})}}{2s}.$$

Föltéve már most, hogy a $2s$ kerület állandó, kereshetjük azt, hogy az m^2 terület mely határok közt változhat. Mindenekelőtt

$$z = \frac{s^2 - m^2}{s}$$

kell, hogy positív legyen, minek föltétele

$$s^2 - m^2 > 0$$

s minthogy úgy az s, mint az m lényegesen positív mennyiségek, ennélfogva

$$s > m.$$

Továbbá x és y számára csakis reális, sőt csakis positív értékeket fogadhatunk el. Vegyes másodfokú egyenletünk jelváltozásaiból következik, hogy ha az egyenletnek gyökei reálisok, akkor azok positívok is. Az utóbbi szűkebb körű föltétel tehát a realitás tágabb körű föltételében benne foglaltatván, elégséges, ha

$$(s^2+m^2+2sm\sqrt{2})(s^2+m^2-2sm\sqrt{2} \geqq 0.$$

A baloldali szorzatnak első tényezője mindig positív lévén, a vizsgálatot csupán a második tényezőre kell kiterjesztenünk, s így föltételi egyenlőtlenségünk

$$s^2+m^2-2sm\sqrt{2}) \geqq 0$$

alakban írható föl.

Minthogy m^2-nek együtthatója positív, azért m az

$$m^2 - 2sm\sqrt{2} + s^2 = 0$$

egyenlet gyökeitől meghatározott intervallumon kívül minden értéket fölvehet. Az egyenlet gyökei :

$$m_1 = s(\sqrt{2}+1)$$

$$m_2 = s(\sqrt{2}-1).$$

Az m_1 gyök minimumra vezetne; de az $s > m$ föltétel tekintetbe vétele mellett mind az m_1 értéket, mind pedig az m_1-nél nagyobb értékeket ki kell zárnunk, mert föltételünknek nem tesznek eleget.

Az m_2 gyök, mely a terület maximumának felel meg, eleget tesz az $s > m$ föltételnek, s ezt minden az m_2-nél kisebb érték is kielégíti. A maximum esetében

$$m^2 = s^2(\sqrt{2}-1)^2$$

$$= s^2(3-2\sqrt{2}).$$

Erre a határértékre nézve a ξ kifejezésében szereplő gyökjel alatti mennyiség eltűnik, s így az egyenletnek egyenlő gyökei vannak. De ezek a gyökök x-et és y-t, a háromszög befogóit adják, s így *az állandó kerületű derékszögű háromszögek között a derékszögű egyenlőszárú háromszögnek legnagyobb a területe.* Minthogy

$$x = y = s(2-\sqrt{2})$$

tehát

$$z = 2s(\sqrt{2}-1).$$

21. *Az adott területű derékszögű háromszögek közül melyiknek kerülete a legkisebb?*

Ugyanis csupán azt kell megállapítanunk, hogy s-nek mely értékeire nézve áll

$$s^2 - 2sm\sqrt{2} + m^2 \geqq 0.$$

Minthogy s^2-nek együtthatója positív, ismét csak az

$$s^2 - 2sm\sqrt{2} + m^2 = 0$$

másodfokú egyenlet gyökeitől határozott intervallumon kívül eső értékekre szorítkozhatunk. Az egyenlet gyökei :

$$s_1 = m(\sqrt{2}+1)$$

$$s_2 = m(\sqrt{2}-1),$$

melyek közül az első a minimum, a második a maximum esetét adja. A maximum esete nem felelvén meg az $s > m$ föltételnek, nemcsak maga, de a nála nagyobb értékek mindegyike is kizárandó. Így tehát egyedül a minimum esete áll fenn, s a kerület ebben az esetben

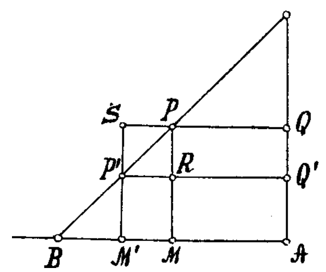
$$= m(\sqrt{2}+1).$$

A gyökzendő eltűnéséből a gyökök egyenlősége következvén, kimondhatjuk, hogy *az egyenlő területű derékszögű háromszögek közt az egyenlőszárú derékszögű háromszögnek kerülete a legkisebb.*

22. *Steiner-féle megfejtés. Az egyenlő kerületű derékszögű négyszögek között a négyzetnek területe a legnagyobb.*

E feladat megfejtését *Jacob Steiner* (1796–1863) nyomán adjuk (Steiner-Schröter: Theorie der Kegelschnitte p. 41.). E módszer egyrészt azt igazolja, hogy nem mindig az általános módszer a legegyszerűbb, hanem sok feladatnál különös módszer alkalmazható előnyösen, másrészt meg azt, hogy az analysis mellett a geometria is megállja helyét a maga módszereivel.

Legyen AB az állandó kerületnek fele, tehát a két szomszédos oldalnak összege. M az AB-nek közepe; $AMPQ$ az AM oldal fölött alakított négyzet. Kössük össze B-t a P-vel, s állítsunk ennek az egyenesnek egy tetszésszerinti P' pontjából AB-re merőlegeset, $P'M'$-t. Húzzuk $P'Q'$-t az AB-vel párhuzamosan, s keressük föl a PQ és $P'M'$ egyenesnek S metszéspontját.



Az $AM'PQ'$ derékszögű négyszög oldalainak nyilván ugyanakkora az összege, mint az $AMPQ$ négyzet esetében. Terület $MM'SP = PQQ'R$, mert egybevágók; tehát terület $MM'P'R < PQQ'R$ s így terület $AM'P'Q' < AMPQ$; tehát tényleg a négyzet a legnagyobb területű négyszög az egyenlő kerületűek között.

A paraméteres módszer alkalmazható a következő feladatokra:

876. Vizsgáljuk meg az adott kör körül írt egyenlőszárú trapéz területének változásait, s állapítsuk meg az eminens értékű terület esetét.

877. Adott derékszögű négyszög körül írjunk minimális területű egyenlőszárú háromszöget.

878. Az $ABCD$ négyzetnek meghosszabbított CD oldalán keressük föl azt az M pontot, melyre nézve az $MA : MB$ aránynak értéke maximális.

879. Az Ox, Oy tengelyek egymásra merőlegesek. Oy-on fekszik a C pont, Ox-en az M és B pontok. Határozzuk meg Ox-en az M pontnak helyzetét olyképen, hogy $\dfrac{MA \cdot MB}{\overline{MC}^2}$ eminens értéket vegyen föl. (Specialis eset: $\overline{OC}^2 = OA \cdot OB$).