

I. *Mi az a függvény?* Erre a kérdésre rövid, de általános érvényű feleletet adni rendkívül nehéz. Mivel azonban tárgyunk igen speciális jellegű, azért erre az *Euler*-féle értelmezés teljesen kielégítőnek fog bizonyulni. *Euler* azt a feleletet adta, hogy *függvény alatt azt az analitikai kifejezést értjük, mely egy változó mennyiség és bizonyos állandó mennyiségek közt fennáll.* Az "analitikai kifejezés" értelmét úgy állapította meg, hogy a függvényben az algebrai műveleteken kívül még a logaritmusz, exponenses mennyiségek és *számtalan egyéb kapcsolatok* is szerepelhetnek, ezzel a függvény-fajok kimeríthetetlen sokaságára rámutatván.

Algebrai és főleg geometriai tanulmányaink közben gyakran találkozunk változó és állandó mennyiségek kapcsolatával. Legtöbbször nem történik utalás az ily kapcsolatoknak függvény voltukra. Tudjuk pl., hogy a kör területét  $2r\pi$ , területét  $r^2\pi$  adja. Ezekben  $\pi$  az állandó mennyiség,  $r$  a változni képes mennyiség, melynek értékétől egy másik mennyiségnek, a területnek, illetőleg a területnek értéke függ.

Mint hogy  $r$ -nek értékét magunk szabhatjuk meg, azért ezt a változó mennyiséget *független változó*-nak nevezzük;  $r$ -rel együtt azonban a terület és terület is megváltozik, tehát ezek ugyancsak változó mennyiségek. Mint hogy azonban értékük a független változó értékével szoros kapcsolatban áll, ezért ezeket a független változóval szemben *függő változó*-nak nevezzük.

A változókat rendszerint az abc utolsó betűivel szoktuk jelölni, még pedig  $x$ -nek nevezzük a független változót,  $y$ -nak a függő változót. E szerint  $y = 2\pi x$ , illetőleg  $y = \pi x^2$  volnának a fenti függvények jelölései.

2. *Hogyan jelöljük a függvényt általánosságban?* A függvény jelölésére általános jelvény is szolgál. Ugyanis a függvényben szereplő állandókat nem tekintvén, első sorban a változókra kell figyelmünket fordítani. Ha már most a függvény (functio) szó kezdőbetűjével  $f$ -fel azokat a műveleteket jelöljük, melyek a független változót az állandókkal összekötik, akkor már ráakadtunk a szükséges jelvényre. Tegyük ki  $f$  mellé  $x$ -et, a független változót, s legyen gondunk arra, hogy felírt jelvényünk se szorzatnak, se hatványnak tekinthető ne legyen, akkor czélt értünk. Ez pedig az  $f(x)$  alakban való jelöléssel érhető el. Ha még a függő változót is tekintetbe vesszük, akkor a függvény jele:

$$y = f(x)$$

(olv.  $y$  függvénye  $x$ -nek).

Az ilyen függvényt *kifejtett, explicit* függvénynek nevezzük, a mennyiben a függő változó a független változótól elkülönítetten fordul elő. De ha pl.

$$y^2 + ax + b = 0$$

olyként értelmeztetnék, hogy benne  $y$  a függő,  $x$  a független változó, akkor a változók nincsenek egymástól elkülönítve, *ki nem fejtett, implicit* függvénnnyel állunk szemben. Jelölése így eszközölhető:

$$f(x, y) = 0.$$

3. *A függvények osztályozása.* Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a független változónak és a függvényben szereplő állandóknak csupán reális értékeit vesszük tekintetbe. A függvények osztályozásánál az analitikai kifejezésre kell figyelnünk. Ennek jellegét a benne szereplő műveletek szabják meg. Az összeadás, kivonás, szorzás, osztás, pozitív egész számú kitevőre való hatványozás és gyökvonás, szóval az algebrai műveletek azok, melyek az u. n. *algebrai függvények*-ben még előfordulhatnak. Ha a független változó pozitív, egész számú kitevőre vonatkozó gyökjel alatt szerepel, akkor a függvény *irrationális*, ellenben, ha a független változó csupán a többi műveletekkel van az állandókkal összekapcsolva, akkor a függvény *racionális*.

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

az irrationális,

$$y = ax^2 + bx + c$$

a racionális függvény egy-egy példája.

A törtkitevőjű és negatív kitevőjű hatványok ismeretes értelmezése alapján könnyen belátható, hogy

$$y = (a + bx)^{\frac{3}{2}}$$

irrationális függvény, ellenben

$$y = (a + bx)^{-5}$$

racionális függvény. Mert az első

$$y = \sqrt{(a + bx)^3}$$

a második

$$y = \frac{1}{(a + bx)^5}$$

alakban írható. Ugyanígy a negatív vagy törtkitevőjű gyök is mindig irrationális függvényre vezet. Ezzel megokoltuk azt a korlátozást, melyet a kitevőkre vonatkozólag megtettünk. Tehát: *mielőtt az algebrai függvény jellege felől döntenénk, a benne szereplő összes kitevőket pozitív egész számok alakjában kell szerepeltetnünk.*

A gyöknek többértékűsége miatt az irracionális függvényekben a függő változó egy bizonyos értékéhez a független változónak egyidejűleg több értéke tartozik; a racionális függvényekben azonban csak egy. E szerint megkülönböztetünk *egyértékű és többértékű* függvényeket.

A logaritmikusok, az exponenciális s goniometriaival mennyiségek, stb., mint pl. ezek:

$$y = \log x, \quad y = a^x, \quad y = \sin x, \quad y = \arctg x$$

u. n. *transcendens* függvények.

4. *Az algebrai függvények osztályozása.* A szerint, a mint a független változó osztóként szerepel, illetőleg mint ilyen nem szerepel, a függvény lehet *tört függvény*, illetőleg *egész függvény*.

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{a + bx}{c + dx}$$

törfüggvények, ellenben

$$y = a + bx + cx^2$$

egész függvény.

Az egész függvényre nézve a független változónak a legmagasabb kitevőjű hatványa mérvadó. E szerint az algebrai egész függvény lehet: elsőfokú vagy *linearis*, mint pl.  $y = a + bx$ ; másodfokú vagy *quadrátikus*, mint pl.  $y = a + bx + cx^2$ . Az  $n$ -ed fokú algebrai egész függvény alakja tehát

$$y = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + k.$$

5. *A függvény folytonosságáról.* A függvény akkor folytonos, ha a független változónak bármily csekély növekedtével a függő változónak ugyancsak csekély változása (növekedése, esetleg fogyása) jár.

Ez a tulajdonság vagy a független változónak minden értékére nézve, tehát a  $-\infty$ -tól  $+\infty$ -ig terjedő határok között, vagy a függő változónak egy meghatározott *interealtum*-ból vett értékeire vonatkozhatik. Hogy az utóbbit megértsük, hivatkozunk az

$$y = \operatorname{tg} x$$

függvényre, mely  $x$ -nek  $0^\circ$ -tól  $90^\circ$ -ig terjedő értékeire nézve folytonos, de már a  $0^\circ$ -tól  $180^\circ$ -ig terjedő értékeire nézve nem az, mert hiszen  $\operatorname{tg} x$  az  $x$ -nek  $90^\circ$ -hoz igen közel álló valamely értékére nézve egy igen nagy pozitív számmal, a  $90^\circ$ -ot igen csekéllyel túllépő értékére nézve pedig egy igen nagy negatív számmal egyenlő. Az  $y = \operatorname{tg} x$  függvény folytonosságában  $x = 90^\circ$  esetére nézve szakadás áll be.

A folytonosság algebrai jellemzésénél e szerint a függvény változását kell tekintetbe vennünk. Ha a független változót valamely igen kicsiny értékkel növeljük, akkor az  $f(x)$  függvény átalakul  $f(x+h)$ -vá. A függvény értékének változását az

$$f(x+h) - f(x)$$

különbség adja meg. Ha ez a különbség  $h$ -val egyidejűleg elenyésző csekély mennyiség, akkor a függvény folytonos. Minden egyes esetben a kérdés csak akkor van véglegesen eldöntve, ha megvizsgáljuk, hogy mely körben, mely határok közt folytonos a függvény. Könnyen kimutathatjuk, hogy tárgyalt függvényünk  $x$ -nek minden értékére nézve folytonos. Ugyanis:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x+h) = a(x+h)^2 + b(x+h) + c,$$

ha a függvény változását számítjuk, akkor

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c) = \\ &= ah^2 + 2ahx + bh = h(ah + 2ax + b). \end{aligned}$$

Már pedig, tekintet nélkül arra, hogy  $x$ -nek mely véges értékéből indulunk ki,

$$h(ah + 2ax + b)$$

a  $h$ -val egyidejűleg válik végtelenül kicsinnyé s így a 2-od fokú algebrai egész függvény a független változónak minden értékére nézve folytonos.