

I. *definíció.* Azt az egyenest, mely valamely görbét metsz, a görbe *szelőjének*, (*secans*) nevezzük.

II. *definíció.* Ha valamely görbe P_1P_2 szelőjét a P_1 pont körül úgy forgatjuk, hogy P_2 folyton közeledik P_1 -hez, akkor a P_1P_2 szelőnek azt a határhelyzetét, a melyben P_2 a P_1 -gyel összeesik, *érintőnek* nevezzük. P_1 pedig az *érintési pont*.

III. *definíció.* Valamely görbe P_1 és P_2 pontjait összekötő távolságokat húrnak nevezzük

IV. *definíció.* Ha található oly egyenes, illetőleg pont, melyhez képest az adott görbe pontjai szimmetrikusan helyezkednek el, akkor azt a görbe *tengelyének*, illetőleg *középpontjának* (*o*) nevezzük.

V. *definíció.* Valamely görbe lehet *véges* vagy *végtelen nagy* és *zárt* vagy *nyílt*. A véges görbe pontjai egy meghatározott területen belül vannak, míg a végtelen görbének pontjai meghatározott terület belsejébe nem zárhatók. A zárt görbe oly véges görbevonallal, amely a síkból véges területet vág ki. Minden más görbét nyílt görbének nevezünk.

VI. *definíció.* Valamely görbe lehet *egy* vagy *többágú*, a mint egy vagy több egymással össze nem függő részből áll.

VII. *definíció.* Valamely görbét n -ed *rendűnek* nevezünk, ha valamely egyenes azt legfeljebb n pontban metszi és n -ed osztályúnak, ha valamely pontból legfeljebb n érintő húzható a görbéhez.

A következőkben oly görbéket fogunk tárgyalni, a melyek a kúpok síkmetszeteinél jönnek létre, - miért is közös néven kúpszeleteknek nevezzük.

A kúpszeletek parabolák, ellipsisek vagy hyperbolák lehetnek. Legelőször a parabolával fogunk megismerkedni.

I. A parabola.

I. *definíció.* A sík azon pontjainak mértani helyét, melyek adott egyenestől (*vezérvonal*, *directrix*: V_1V_2) és adott ponttól (*gyújtópont* *focus*: F) egyenlő távolságra vannak, *parabolának* nevezzük.

A parabola valamely P pontjának szerkesztése a definíció alapján a következőként történik: A focusból a vezérvonalra bocsájtott FA' merőlegesen tetszőszerint felvett P'' pontban merőlegest állítunk FA' -re és az $A'P''$ -vel, mint sugárral kört rajzolunk F körül. Az így nyert P_1 és P_2 metszéspontok pontjai a parabolának.

Bizonyítás: Ha a következőkben a sík bármely (pl. M) pontjából a V_1V_2 illetőleg az FA' -re bocsájtott merőleges talppontját M' illetőleg M'' -mel jelöljük, akkor a nyert P_1 és P_2 pontok esetében P_1'' és P_2'' egybeesik P'' -vel és

$$P_1P_1' = A'P'' = FP_1$$

és

$$P_2P_2' = A'P'' = FP_2.$$

Vagyis az I. definíció alapján a P_1 és P_2 tényleg pontjai a parabolának.

I. *tétel.* A focusból a directrixre bocsájtott merőleges ($A'F$) tengelye a parabolának.

Bizonyítás: Az P_1FP'' és a P_2FP'' háromszögek egybevágóságából ugyanis következik, hogy:

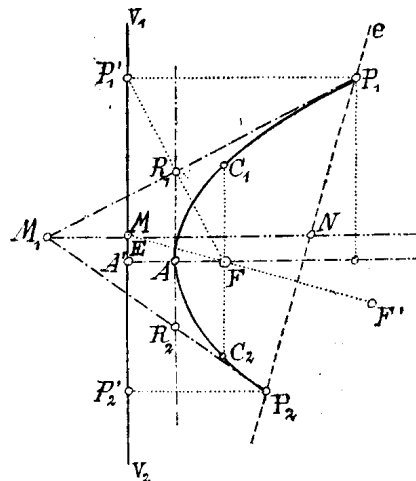
$$P_1P_1'' = P_1P'' = P_2P'' = P_2P_2''.$$

II. *definíció:* Ha a focuson átmenő merőlegesen a parabola C_1 és C_2 pontja fekszik, akkor a

$$C_1C_2 = 2A'F = 2p$$

távolságot a parabola *paraméterének* nevezzük.

Ha A az $A'F$ felezéspontja, akkor a rajta átmenő merőlegesen a parabolának csak egy pontja van: A , mert az $A'A$ sugarú F -ből rajzolt kör csak érinti a merőlegest.



III. *definíció.* A focusból a directrixre bocsájtott merőleges távolság ($A'F$) felezéspontját, A -t a parabola csúcsának és az ezen pontban a tengelyre merőlegesen álló egyenest *csúcserintőnek* nevezzük.

Az eddigiekből máris következik, hogy:

II. *tétel.* A parabola vezérvonala és csúcserintője párhuzamosak, és

III. *tétel.* A parabola csúcserintője felezi a focust a vezérvonal valamely pontjával összekötő távolságot.

Ha a P'' -t az A -tól balra vesszük fel, akkor metszéspontot nem is kapunk már, mert

$$A'P'' < FP''.$$

A -tól jobbra pedig akármilyen messze is menjünk, mindig kapunk metszéspontot, tehát:

IV. *tétel.* A parabola csúcserintőjének jobboldalán végtelenig elterjedő tehát *nyílt, egyágú görbevonat*.

IV. *definíció.* Valamely P pontról akkor mondjuk, hogy a parabolán kívül vagy belül van, ha:

$$PP' \leq PF.$$

V. *tétel.* Valamely egyenes akkor metszi a parabolát, ha találhatunk rajta oly P és Q pontokat, hogy:

$$(1) \quad PP' < PF$$

és

$$(2) \quad QQ' > QF.$$

Bizonyítás: Az (1) feltétel értelmében az egyenesnek van a parabolán kívül, a (2) értelmében pedig van a parabolán belül is pontja. A P -ből tehát csak úgy juthatunk Q -ba, ha egyszer a parabolán is áthaladtunk.

V. *definíció.* Ha valamely hűrt egyik végpontja körül addig forgatunk, míg a tengellyel párhuzamos nem lesz, akkor *átmérőt* kapunk.

VI. *tétel.* A parabola összes átmérői párhuzamosak.

I. *feladat.* Legyen adva a parabola focusa és directrix által. Szerkesszük meg a parabola és egy adott e egyenes metszéspontjait.

Ha a metszéspontok egyikét P -vel és az F -nek e -re vonatkoztatott tükörképét F' -tel jelölöm, akkor:

$$PF' = PF = PP_1 \text{ és } PP' \perp V_1V_2.$$

A P tehát oly kör középpontja, a melynek FF' húrja és V_1V_2 érintője, tehát ha FF' a V_1V_2 -t M -ben metszi, akkor :

$$\overline{MP'}^2 = MF \cdot MF'$$

Az MP' -t megszerkesztvén, azt M -ből a directrixek mindkét oldalára rávihetjük, miáltal a P'_1 és P'_2 pontokat nyerjük. A P'_1 és P'_2 -ben a V_1V_2 -re állított merőlegesek az e -t a P_1 és P_2 keresett metszéspontokban találják.

Feladatunknak legfeljebb két megoldása lehet, tehát:

VII. *tétel:* A parabola másodrendű görbe.

VIII. *tétel.* Ha valamely egyenes olyan helyzetű, hogy a focusnak reá vonatkozó tükörképe a vezérvonal baloldalára esik, akkor az egyenes nem metszi a parabolát.

Bizonyítás. Ebben az esetben V_1V_2 vezérvonal metszené az FF' hűrt, a mi lehetetlen.

Ha már most a P_1P_2 -t a szilárd P_1 körül a nyíl irányában forgatom, akkor P_2 mindig közelebb jut P_1 -hez. Mi történik F' -tel?

A míg P_2 a P_1 alatt van, addig bármilyen közel is jussunk P_1 -hez, az F' a P_1 középpontú P_1F sugarú körön mindig P'_1 -n alul van. Ha pedig P_2 a P_1 fölött van, akkor bármilyen közel is fekszen P_1 -hez, az F' mégis a P'_1 -n felül van. Ha tehát P_2 éppen P_1 -ben van, akkor F' és vele M is összeesik P'_1 -el, vagyis :

IX. *tétel.* A parabola focusának az érintőre vonatkozó tükörképének mértani helye a directrix.

Megfordítva: Ha F' a directrixen van, akkor $MF' = 0$ tehát

$$MP'_1 = MP'_2 = 0,$$

vagyis a metszéspontok egybeesnek.

X. *tétel.* A focusnak az érintőre vonatkozó projekciójának mértani helye a csúcserintő.

Bizonyítás. Ha a P_1 pontban rajzolt érintő az FP'_1 -t R_1 pontban metszi, akkor

$$P_1P'_1R_1\triangle \cong P_1FR_1\triangle$$

mert

$$P_1F = P_1P'_1; P_1R_1 = PR_1 \text{ és } P_1R_1P'_1\angle = P_1R_1F\angle = 90^\circ$$

tehát

$$FR_1 = P'_1R_1$$

tehát a III. tétel értelmében R_1 a csúcserintőn fekszik. És minthogy még:

$$P'_1 P_1 R_1 \angle = F P_1 R_1 \angle = \frac{F P_1 P'_1 \angle}{2}, \text{ azért :}$$

XI. tétel. A parabola érintője felezi az érintési ponthoz tartozó vezérsugár (FP_1) és az átmérő által bezárt szög mellékszögét.

II. feladat. Rajzoljunk a parabola P_1 pontjában érintőt.

Megoldás. $P'_1 F$ messe a csúcserintőt R_1 -ben, akkor $P_1 R_1$ lesz az érintő. (VIII. és IX. tétel.)

Ha P_2 -ben is rajzolunk érintőt és a $P_1 R_1$ és $P_2 R_2$ érintők metszéspontját M_1 -gyel jelöljük, akkor:

$$M_1 P'_1 = M_1 F = M_1 P'_2$$

Ezen tulajdonság alapján könnyen megoldható a következő feladat.

III. feladat. Valamely a parabolán kívül fekvő M_1 pontból rajzoljunk érintőt a parabolához.

Megoldás: M_1 -ből az $M_1 F$ sugárral rajzolt kör messe a $V_1 V_2$ -t és P'_1 és P'_2 -ben, az FP'_1 és az FP'_2 pedig messék a csúcserintőt R_1 és R_2 -ben; akkor $M_1 R_1$ és $M_2 R_2$ lesznek a keresett érintők. Az érintési pontok (P_1 , P_2) a P'_1 és P'_2 -ben a $V_1 V_2$ -re emelt merőlegesek és az érintők metszéspontjai lesznek. Minthogy egy kör és egy egyenes legfeljebb 2 pontban metszhetik egymást, tehát következik, hogy:

XII. tétel. A parabola másodosztályú görbe.

XIII. tétel. Ha valamely M_1 pontból megrajzoljuk az $M_1 P_1$ és $M_1 P_2$ érintőket, akkor az M_1 ponton átmenő átmérő felezi a $P_1 P_2$ érintési húrt N -ben és $P_1 M_1 F \angle = P_2 M_1 N \angle$.

Bizonyítás. (a) Messe az $M_1 N$ a $V_1 V_2$ -t E -ben, akkor

$$EP'_1 = EP'_2,$$

mert $M_1 E \perp P'_1 P'_2$ és $M_1 P'_1 = M_1 P'_2$. Ha még tekintetbe vesszük azt is, hogy

$$P_1 P'_1 \parallel EN \parallel P_2 P'_2,$$

akkor

$$P_1 N : P_2 N = P'_1 E : P'_2 E$$

vagyis

$$P_1 N = P_2 N.$$

(b)

$$M_1 P_2 P'_2 \angle = F P'_2 P'_1 \angle,$$

mert száraik merőlegesek egymásra.

Ámde az M_1 középpontú $M_1 F$ sugarú körben

$$F P'_2 P'_1 \angle = \frac{F M_1 P'_1 \angle}{2} = F M_1 P_1 \angle$$

másrészt:

$$P_2 M_1 N \angle = M_1 P_2 P'_2 \angle,$$

tehát

$$P_1 M_1 F \angle = P_2 M_1 N \angle.$$

A X., XII. tétel és a III. feladat alapján könnyen megoldható a következő:

IV. feladat. Szerkesszük meg a parabola directrixét és focusát, ha ismerjük két érintőjét és rajtuk fekvő 2 érintési pontot.

XIV. tétel. A párhuzamos hűrok felezéspontjainak mértani helye egy a hűrokhoz konjugált átmérő.

Bizonyítás. Legyen $P_1 P_2$ az egyik húr, akkor (I. feladat) M felezi a $P'_1 P'_2$ távolságot, tehát az M -en átmenő átmérő felezi $P_1 P_2$ -t. S minthogy az összes $P_1 P_2$ -vel párhuzamos hűrokra vonatkozólag M ugyanaz, tehát a tétel igaznak bizonyult.

XV. tétel. Valamely átmérő végpontjában rajzolt érintő párhuzamos az átmérőhöz konjugált hűrokkal.