I. Induljunk ki a következő geometriai sorból

$$q^n + q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q^2 + q = q\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Osszuk az egyenlőség baloldalát $(q-r)$-rel, akkor

$$[q^n + q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q^2 + q] : (q-r) = q^{n-1} + (r+1)q^{n-2} +$$

$$+(r^2+r+1)q^{n-3} + \ldots + (r^{n-2} + r^{n-3} + \ldots\ + r + 1)q +$$

$$+(r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + r + 1) + \frac{r^n + r^{n-1} + \ldots\ + r^2 + r}{q-r}.$$

Ebből, ha mind a két oldalt $(q-r)$-rel szorozzuk és az egyenlőség oldalait felcseréljük, akkor

$$\left[q^{n-1} + (r+1)q^{n-2} + \frac{r^3-1}{r-1}q^{n-3} + \ldots\ + \frac{r^{n-1}-1}{r-1}\cdot q + \frac{r^n-1}{r-1}\right](q-r) +$$

$$+r\frac{r^n-1}{q-1} = q\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Legyen $q = 10$ és $r = 1$, akkor ezen sorból nyerjük, hogy

$$[10^{n-1} + 2\cdot 10^{n-2} + 3\cdot 10^{n-3} + \ldots + (n-1)10 + n]\cdot 9 + n = 10\cdot\frac{10^n-1}{9}.$$

Megjegyezvén, hogy $\left[\frac{r^n-1}{r-1}\right]_{r=1} = n.$

Ha most az egyenlőség mindkét oldalához +1-et adunk, akkor az n bármilyen positív egész szám értéke mellett, a jobboldali számnak valamennyi jegye 1 lesz, vagyis

$$[10^{n-1}2\cdot 10^{n-2} + 3\cdot 10^{n-3} + \ldots + (n-1)10 + n]\cdot 9 + (n+1) = 10\cdot\frac{10^n-1}{9} + 1.$$

Írjunk e sorba n helyébe egymásután 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ...-et, ekkor nyerjük a következő táblázatot:

0·9	+	1	=	1
1·9	+	2	=	11
12·9	+	3	=	111
123·9	+	4	=	1111
1234·9	+	5	=	11111
12345·9	+	6	=	111111
123456·9	+	7	=	1111111
12345467·9	+	8	=	11111111
123454678·9	+	9	=	111111111
1234546789·9	+	10	=	1111111111
———				
12345467900·9	+	11	=	11111111111
...				
...				

II. Legyen adva a következő két sor

$$q^n + q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q^2 + q$$

és

$$-q^{n-1} - 2q^{n-2} - 3\cdot q^{n-3} - \ldots - (n-2)q^2 - (n-1)q.$$

Képezzük e két sor összegét és az összeget osszuk el $q-r$-rel, akkor

$$[q^n - q^{n-2} - 2q^{n-3} - \ldots - (n-3)q^2 - (n-2)q] : (q-r) =$$

$$= q^{n-1} + rq^{n-2} + (r^2-1)q^{n-3} + (r^3-r-2)q^{n-4} + \ldots$$

$$+ \ldots + (r^{n-2} - r^{n-4} - 2r^{n-5} - \ldots - (n-3))q +$$

$$+(r^{n-1} - r^{n-3} - 2r^{n-4}) - \ldots - (n-2) + \frac{r^n - r^{n-2} - 2r^{n-3} \ldots - (n-2)r}{q-r}.$$

Ebből, ha mind a két oldalt $(q-r)$-rel szorozzuk és az egyenlőség oldalait felcseréljük, akkor

$$[q^{n-1} + rq^{n-2} + (r^2-1)q^{n-3} + (r^3 - r - 2)q^{n-4} + \ldots +$$

$$+r^{n-2} - r^{n-4} - \ldots - (n-3))q + (r^{n-1} - r^{n-3} - 2r^{n-4} - \ldots - (n-2))(q-r) +$$

$$+(r^n - r^{n-2} - 2r^{n-2} - \ldots - (n-2)r) = q^n - q^{n-2} - 2q^{n-3} - \ldots - (n-2)q.$$

Legyen most $q = 10$ és $r = 2$, akkor

$$[10^{n-1} + 2 \cdot 10^{n-2} + 3 \cdot 10^{n-3} + 4 \cdot 10^{n-4} + \ldots + (n-1)10 + n] \cdot 8 + 2n =$$

$$= 10^n - 10^{n-2} - 2 \cdot 10^{n-3} - \ldots - (n-2) \cdot 10.$$

Az egyenlőség mindkét oldalához $-n$-et adván, lesz

$$[10^{n-1} + 2 \cdot 10^{n-2} + 3 \cdot 10^{n-3} + 4 \cdot 10^{n-4} + \ldots + (n-1)10 + n] \cdot 8 + n =$$

$$= 10^n - 10^{n-2} - 2 \cdot 10^{n-3} - \ldots - (n-2)10 - n.$$

Írjunk e sorban n helyébe egymásután 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 …-et, ekkor nyerjük a következő táblázatot:

1·8	+	1	=	9
12·8	+	2	=	98
123·8	+	3	=	987
1234·8	+	4	=	9876
12345·8	+	5	=	98765
123456·8	+	6	=	987654
1234567·8	+	7	=	9876543
123454678·8	+	8	=	98765432
1234546789·8	+	9	=	987654321
———				
12345467900·8	+	10	=	9876543210
…				
…				