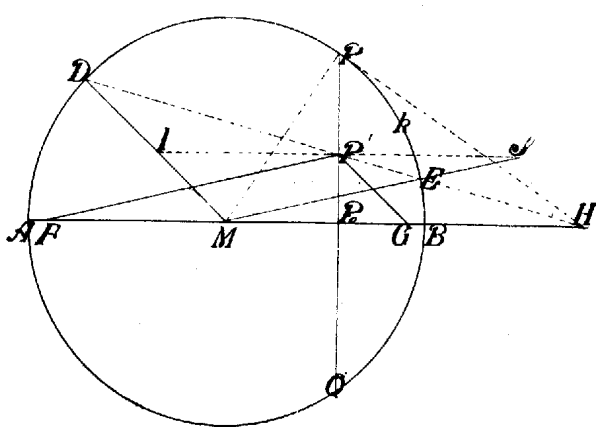
A következőkben két különböző bizonyítást mutatunk be arról a tételről, hogy a kör derékszögű projekciója egy síkra ellipsis.

I. bizonyítás.

Kiindulunk abból a tételből, hogy egy pont polárisa egy körre vonatkozólag, a ponton keresztül fektetett szelőnek a körben fekvő részét ugyanolyan viszony szerint osztja, mint maga a pont az egész szelőt, azaz ha (1. ábra) a H pontnak PQ polárisa a k körre vonatkozólag a H ponton keresztül menő szelőt a P' pontban metszi, és a HP' szelőnek metszőpontjai a k körrel $D,\ E$, akkor

(1) $$DP' : P'E = DH : EH.$$



1. ábra

Jelöljük a k körnek sugarát a-val, középpontját M-mel; az MH egyenes metszőpontjait a k körrel $A,\ B$-vel; az $MD,\ ME$ körsugarak metszőpontjait a P' ponton keresztül menő és az AB átmérővel párhuzamos egyenessel $I,\ J$-vel, végre az $AB,\ PQ$ egyenesek metszőpontját P_0-sal.

Minthogy $P'DI \sim HDM,\ P'EJ \sim HEM$, azért

(2) $$P'I : DP' = HM : DH$$

(3) $$P'E : JP' = HE : HM$$

(4) $$P'I : DI = HM : DM$$

(5) $$JE : JP' = ME : MH.$$

Az (1), (2) és (3) aránypárok szorzatából következik

$$P'I = JP',$$

ebből és a (4) és (5) aránypárok szorzatából következik

$$JE = DI.$$

Ezen eredményeket tekintve

$$IM + JM = DM - DI + EM + JE = DM + EM = 2a;$$

ha a P' ponton keresztül menő és az $MI,\ MJ$-vel párhuzamos egyenesek az AB átmérőt a $G,\ F$ pontokban metszik, úgy hogy

$$GP' = MI,\ P'F = JM,\ PI' = GM,\ JP' = MF,$$

akkor

(6) $$GP' + P'F = 2a.$$

Ha a (2) és (3) aránypárt ekkép felírva

$$P'I : DP' = HM : DH$$

$$JP' : P'E = HM : HE$$

tagonként egymással szorozzuk a következő

$$P'I \cdot JP' : DP' \cdot P'E = \overline{HM}^2 : DH \cdot HE \tag{7}$$

aránypárt nyerjük.

És mert

$$DP' \cdot P'E = PP' \cdot P'Q = (PP_0 - P'P_0)(PP_0 + P'P_0) = \overline{PP_0}^2 - \overline{P'P_0}^2$$

$$DH \cdot HE = \overline{PH}^2,\ P'I = JP'$$

$$HM : PH = MP : PP_0,$$

azért (7)-ből származik

$$\overline{P'I}^2 : \overline{PP_0}^2 - \overline{P'P_0}^2 = \overline{MP}^2 : \overline{PP_0}^2$$

vagy

$$\overline{MF}^2 = \overline{P'I}^2 = \overline{MP}^2\left[1 - \left(\frac{P'P_0}{PP_0}\right)^2\right].$$

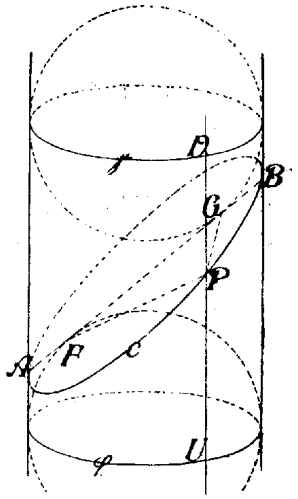
A nyert eredményből látható, hogy az F, G pontok helyzete az AB átmérőn csak a kör sugarától és azon viszonytól függ, mely szerint a P' pont a PP_0 vonaldarabot osztja, azaz: ha a k kör pontjaiból az AB átmérőre bocsátott merőlegeseket állandó viszony szerint osztjuk, akkor az osztópontoknak az F, G pontoktól mért távolságai, (6) folytán, a kör átmérőjével egyenlő összeget adnak. Az osztópontok tehát oly ellipsisen feküsznek, melynek gyújtópontjai F, G és főtengelye AB.

Ha ezután a k kört az AB tengely körül tetszőleges szög alatt forgatjuk, a forgatott kör pontjait az eredeti síkra derékszög alatt vetítjük, akkor a nyert projekciók az eredeti k kör pontjaiból az AB átmérőre bocsátott merőlegeseket állandó viszony szerint osztják és ezért a forgatott kör pontjainak projekciói egy ellipsisen feküsznek.

II. bizonyítás.

Kiindulunk abból az ismert tételből, hogy egy forgáshenger síkmetszése ellipsis. Ennek bizonyítása a következő:

Egy forgáshengerbe (2. ábra) F gömböt írunk be, mely a hengert φ kör szerint és a metszősíkot F pontban érinti, azonkívül egy G gömböt, mely a hengert γ kör szerint, a metszősíkot G pontban érinti.



2. ábra

Ha P a metszősík és a henger c metszővonalának egy tetszés szerinti pontja, akkor P egy hengeralkotón fekszik, mely a φ kört U pontban, a γ kört V pontban metszi.

Minthogy egy pontból egy gömbhöz húzható érintők egyenlők, azért:

$$PF = PU,\ PG = PV$$

és

$$PF + PG = PU + PV.$$

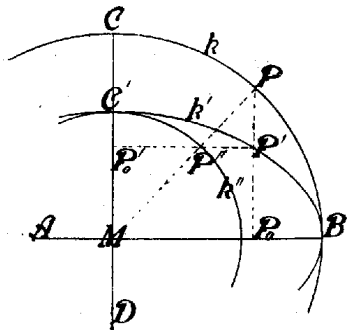
Az UV vonaldarab azonban a P ponttól független és egyenlő a φ és γ körök párhuzamos síkjainak távolságával, tehát a metszősík és a henger metszésgörbéje minden pontjának az F, G pontoktól mért távolságai állandó összeget adnak s mint ilyenek oly ellipszisen feküsznek, melynek gyújtópontjai az F, G pontok.

E segédtételt (mely *Dandelin*-től származik 1822-ből) így fejezhetjük ki:

Oly síkgörbe, melynek derékszögű projekciója egy síkra kör, szükségképp ellipsis.

Ha kimutatható, hogy k kör derékszögű projekciója k' egy síkra oly görbe, melynek derékszögű projekciója bizonyos síkra egy k'' kör, akkor a segédtétel alapján k'-nek ellipsisnek kell lennie.

E végből jelöljük (3. ábra) k kör sugarát a-val, középpontját M-mel, egy tetszés szerinti vonaldarabot b-vel.



3. ábra

Bocsássunk a k kör P pontjából az AB átmérőre PP_0 merőlegest és vegyünk fel ezen egy P' pontot akképpen, hogy $PP_0 : P'P_0 = a : b$. Bocsássunk a P' pontból az AB-re merőleges CD átmérőre egy $P'P'_0$ merőlegest és határozzuk meg ezen a P'' pontot akképpen, hogy

$$P'P'_0 : P''P'_0 = PP_0 : P'P'_0 = a : b.$$

E proporcióból következik (mert P'_0M párhuzamos és egyenlő $P'P_0$, továbbá $P'P'_0$ párhuzamos és egyenlő P_0M):

$$P'_0M : P''P'_0 = PP_0 : P'_0M = a : b,$$

ebből az MPP_0, $P''MP'_0$ derékszögű háromszögek hasonlósága, tehát még

$$MP : MP'' = a : b,$$

végre

$$MP'' = b.$$

Ez eredményt ekképp fejezhetjük ki: ha AB, CD a k körnek két egymásra merőleges átmérője, és a k pontjaiból az AB-re bocsátott merőlegeseket állandó viszony szerint osztjuk, akkor az osztópontok egy k' görbén feküsznek; ha a k' pontjaiból a CD-re bocsátott merőlegeseket az előbbi állandó viszony szerint osztjuk, akkor az új osztópontok egy k'' körön feküsznek.

Forgassuk ezek után a k kört az AB átmérő körül egy tetszés szerinti φ szöggel és projicziáljuk a forgatott k-t az eredeti síkra. A projekciónak, k'-nek, pontja az eredeti k körnek pontjaiból az AB átmérőre bocsátott merőlegeseket állandó viszony szerint osztják. Ha a k' görbét az AB-re merőleges körátmérő körül szintén φ szög alatt forgatjuk és a forgatott görbét az eredeti síkra projicziáljuk, akkor a projekciónak, k''-nek, pontjai a k' pontjaiból a CD-re bocsátott merőlegeseket szintén ugyanazon és az előbbivel egyenlő viszony szerint osztják. S mert a k'' görbe az előbbiek szerint kör, azért a k' görbének, a segédtétel folytán, ellipsisnek kell lennie. A k kör derékszögű projekciója k', tehát ellipsis.

E bizonyításból következik még: „ha az A és a B sík a C síkhoz egyenlő szög alatt hajlik, a mellett az AC, BC síkok metszővonalai egymásra merőlegesek, és az A síkban fekvő kört a C síkra derékszög alatt projicziáljuk, akkor e projekciónak derékszögű projekciója a B síkra szintén kör".