

A határozatlan analitika feladatának megállapítása után *Euler* néhány példa kiszámítása után a

$$bp = aq + n$$

lineáris egyenlet megoldását mutatja be, p és q ismeretlenek pozitív, egész számú értékeit véve tekintetbe. A módszer, az ú. n. *Euler-féle algoritmus*, általánosan ismeretesnek tekinthető, mert minden tankönyvünkben megtalálható. Rámutat arra is, hogy a feladat pozitív egész számokban megoldhatatlan, ha a és b nem levén viszonylagos törzsszámok, közös osztójuk n -nek nem tényezője.

A legközelebbi lépés a határozatlan lineáris egyenletrendszerekhez vezet, melyek az ú. n. *regula Coeci*-vel oldatnak meg. A határozatlanságot korlátozó föltételek a megelőzőkben használtakkal azonosak. Az egyenletrendszer legegyszerűbb alakja:

$$x + y + z = a$$

$$fx + gy + hz = b.$$

Legyen f a második egyenlet bal oldalának legnagyobb, h pedig legkisebb együtthatója. Az egyenlet mindig ilyen alakban írható.

$$fx + fy + fz = fa$$

$$fx + fy + fz > fx + gy + hz$$

s ennek alapján

$$fa > b.$$

Ugyanígy

$$hx + hy + hz = ha$$

$$hx + hy + hz < fx + gy + hz$$

s ennél fogva

$$ha < b.$$

Hogy az egyenletrendszernek pozitív egész számokban megoldása legyen, annak föltételei:

$$fa > b > ha.$$

Különben a feladat az egyik ismeretlennek kiküszöbölésével a megelőzőre vezethető vissza.

Kevésbé ismeretesek az ezek után következő fejtegetések, melyek az

$$a + bx + cy + dx^2 + exy + fx^3 + gx^3 + gx^2y + \dots = 0$$

alakú egyenleteknek egész számokban való megoldásaira vonatkoznak. A folytonosan szaporodó nehézségek felé irányuló menet első megállóhelyén az

$$xy + ax + by = c$$

egyenlettel találkozunk.

$$xy + by = c - ax$$

$$y = \frac{c - ax}{x + b}$$

$$y = -a + \frac{ab + c}{x + b}.$$

Ennek alapján kell, hogy $x + b$ az ismeretes $ab + c$ számnak osztója legyen; ezen számnak minden osztója az egyenletnek megoldását adja. Még pedig: legyen

$$x + b = f \text{ i. } x = f - b.$$

$$y = -a + g = g - a$$

$(ab + c)$ -nek minden fg alakú előállítás az egyenletnek két megfejtését adja; ugyanis az egyik

$$x = f - b, y = g - a,$$

a másik pedig onnét származik, hogy

$$x + b = g$$

tétetvén

$$x = g - b, y = f - a.$$

A legközelebbi, valamivel általánosabb alak:

$$mxy = ax + by + c,$$

honnét

$$y = \frac{ax + c}{mx - b}$$
$$my = \frac{max + mc}{mx - b} = a + \frac{mc + ab}{mx - b}.$$

Ismét kell, hogy $mx - b$ osztója legyen a számlálónak. Ha már most

$$mc + ab = fg$$

és például

$$mx - b = f,$$

akkor

$$x = \frac{f + b}{m}$$

a tényezőkre bontás akkor ad egész számú megoldást, ha $f + b$ osztható m -mel.

A megelőző egyenletekben az egyik ismeretlen csupán lineárisan szerepel. Ha ennek az elsőnél magasabb hatványai is előfordulnak, akkor gyökmennyiségekkel kerülünk szembe. A határozatlan analitika legérdekesebb feladatai azok, melyekben az ilyen egyenletek racionális megoldásai kerestetnek.

Keressük x -nek azon értékeit, a melyekre nézve

$$\sqrt{a + bx + cx^2}$$

értéke racionális. A megfejtés sok esetben egyáltalán lehetetlen; ha lehetséges, akkor egyelőre x -nek racionális értékeire szorítkozunk.

Semmiféle nehézséggel nem jár a feladat, ha $c = 0$. Mert

$$\sqrt{a + bx} = y$$

tétetvén

$$a + bx = y^2$$
$$x = \frac{y^2 - a}{b}$$

és y -nak minden értéke egy-egy megoldásra vezet.

A második esetben c négyzetszámmal egyenlő, tehát

$$\sqrt{a + bx + f^2x^2}$$

rationalizálандó. Legyen

$$\sqrt{a + bx + f^2x^2} = fs + \frac{m}{n}$$
$$a + bx + f^2x^2 = f^2s^2 + \frac{2mfx}{n} + \frac{m^2}{n^2}$$
$$a + bx = \frac{2mfx}{n} + \frac{m^2}{n^2}$$
$$n^2a + n^2bx = 2mnfx + m^2$$
$$x = \frac{m^2 - n^2a}{n^2b - 2mnf}.$$

Ha x -nek ezen értékét helyettesítjük, akkor:

$$\sqrt{a + bx + f^2x^2} = \frac{mnf - m^2 - n^2a}{n^2b - 2mnf}.$$

Mint hogy x -et tört alakjában állítottuk elő, legyen

$$x = \frac{p}{q},$$

a hol

$$p = m^2 - n^2a$$
$$q = n^2b - 2mnf.$$

Az

$$a + \frac{bp}{q} + \frac{f^2p^2}{q^2}$$

trinom teljes négyzet, és az marad, ha q^2 -tel megszorozzuk, vagyis

$$aq^2 + bpq + f^2p^2$$

teljes négyzet, ha p és q helyébe a fentebbi értékek tételnek. Az m , n számok tetszés szerintiek, s így a feladatnak végtelen sok megfejtése van.

A harmadik esetben az a együttható négyzetszám, tehát

$$\sqrt{f^2 + bx + cx^2}$$

a racionalizálандó kifejezés.

Legyen

$$\sqrt{f^2 + bx + cx^2} = f + \frac{mx}{n};$$

ismét

$$\begin{aligned} b + cx &= \frac{2mf}{n} + \frac{m^2x}{n^2} \\ n^2b + n^2cx &= 2mnf + m^2x \\ x &= \frac{2mnf - n^2b}{n^2c - m^2}, \end{aligned}$$

tehát

$$\sqrt{f^2 + bx + cx^2} = \frac{n^2cf + m^2f - mn^2b}{n^2c - m^2}$$

Ismét

$$x = \frac{p}{q}$$

tételként

$$f^2q^2 + bpq + cp^2$$

teljes négyzet, ha

$$\begin{aligned} p &= 2mnf - n^2b \\ q &= n^2c - m^2. \end{aligned}$$

Itt azon speciális eset nevezetes, a melyben $a = 0$. Ennek fejtegetését az olvasóra bízhatom.

A vizsgált trinom teljes négyzetté alakítható még akkor is, ha

$$a + bx + cx^2 = (f + gx) \cdot (h + kx)$$

alakban állítható elő. Ennek bebizonyítása céljából legyen

$$\begin{aligned} \sqrt{(f + gx) \cdot (h + kx)} &= \frac{m \cdot (f + gx)}{n} \\ (f + gx) \cdot (h + kx) &= \frac{m^2 \cdot (f + gx)^2}{n^2} \\ h + kx &= \frac{m^2 \cdot (f + gx)}{n^2} \\ hn^2 + kn^2x &= fm^2 + gm^2x \\ x &= \frac{fm^2 - hn^2}{kn^2 - gm^2}. \end{aligned}$$

Ezen negyedik eset rávezet még egy ötödikre, a mely akkor áll be, ha $a + bx + cx^2$ oly két részre bontható, melyek közül az első teljes négyzet, a második pedig két tényezőnek szorzata; tehát $p^2 + qr$ alakú, a hol p , q , r ilyenforma kifejezések: $f + gx$. Ekkor ugyanis

$$\begin{aligned} \sqrt{p^2 + qr} &= p + \frac{mq}{n} \\ p^2 + qr &= p^2 + \frac{2mpq}{n} + \frac{m^2q^2}{n^2} \\ r &= \frac{2mp}{n} + \frac{m^2q}{n^2} \\ n^2r &= 2mnp + m^2q \end{aligned}$$

s ez x -re nézve lineáris lévén, belőle x könnyen meghatározható.

Gyakran bajos fölismerni azt, hogy a trinom mily módon állítható elő $p^2 + qr$ alakban, s ezért kíváncsiak volnánk egy általánosan alkalmazható módszerre szert tennünk. Eleinte x helyébe kicsiny számokat helyettesítvén, próbálgatással törekszünk célra érni. Ha találunk megfelelő értéket, akkor abból minden megoldást levezethetünk. Ugyanis

$$x = \frac{t}{u}$$

helyettesítéssel

$$a + \frac{bt}{u} + \frac{ct^2}{u^2}$$

áll elő, s ha ez teljes négyzet, akkor u^2 -tel való szorzata

$$au^2 + btu + ct^2$$

szintén teljes négyzet lesz. Most már keresnünk kell oly t , u számokat, a melyekre nézve a fentebbi kifejezés teljes négyzetté válik.

Számtalan olyan trinom létezik, a mely semmiféle módon sem alakítható át teljes négyzetté. Nehogy ezekkel hiába vesződjünk, czélszerű lesz néhány ismertető jelet megállapítanunk, hogy fáradozásaink sikertelenségét már eleve fölismerhessük.

Mindenek előtt könnyen rájövünk arra, hogy a trinom középső tagját az

$$x = \frac{y - b}{2c}$$

helyettesítéssel eltávolíthatjuk. Ugyanis

$$\begin{aligned} a + \frac{by - b^2}{2c} + \frac{cy^2 - 2bcy + bc^2}{4c^2} &= \\ = \frac{4ac^2 + 2bcy - 2bc^2 + cy^2 - 2bcy + bc^2}{4c^2} &= \\ = \frac{4ac - b^2 + y^2}{4c}. \end{aligned}$$

Föltéve, hogy ez a kifejezés teljes négyzet, akkor

$$\frac{4ac - b^2 + y^2}{4c} = \frac{z^2}{4}$$

tehető, honnét

$$\begin{aligned} 4ac - b^2 + y^2 &= cz^2 \\ y^2 &= cz^2 + b^2 - 4ac. \end{aligned}$$

Ha

$$b^2 - 4ac = t,$$

akkor

$$cz^2 + t$$

lesz a teljes négyzetté átalakítandó kifejezés, mely lényegesen egyszerűbb alakú, mint az eredetileg adott trinom.

$t = 0$ esetében a kifejezés csak akkor teljes négyzet, ha c is az. Ez már oly ismertető jel, a mely igen gyakran alkalmazható.

Általános ismertető jelet nyerendő, tekintsünk egy d egész számot, s osszuk el ezzel az összes egész számokat. Könnyen belátható, hogy az összes egész számok

$$\begin{aligned} &dn \\ &dn + 1, \quad dn + 2, \quad dn + 3, \quad \dots \\ &dn - 1, \quad dn - 2, \quad dn - 3, \quad \dots \end{aligned}$$

alakban állíthatók elő.

$dn + k$ és $dn - k$ négyzeteinek az a közös tulajdonságuk, hogy d -vel való osztásuknál mindkettő a k^2 számot adja maradékkul, a mit úgy fejezhetünk ki, hogy $(dn + k)^2$ és $(dn - k)^2$ a d -re mint osztóra nézve egyenlő maradékúak.

Ezen megjegyzés alapján számtalan

$$at^2 + bu^2$$

alakú kifejezésre nézve kimutatható, hogy soha sem lehet teljes négyzetté. Pl. a 7-es szám esetében belátható, hogy

$$7t^2 + 3u^2, \quad 7t^2 + 5u^2, \quad 7t^2 + 6u^2$$

sohasem lehetnek teljes négyzetté; mert u -t 7-tel elosztván, a maradékok: 1, 2 vagy 4. Már pedig az elsőnél a maradékok 3, 6 vagy 5, a másodiknál 5, 3 vagy 6, a harmadiknál pedig 6, 5 vagy 3.