

A

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 0$$

alakú egyenletek gyöktelenítés után a következő alakot nyerik:

$$-x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 0,$$

mely egyenlet baloldala még a következő alakban írható: A

$$(1) \quad (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})(\sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{x})(\sqrt{z} + \sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z})$$

Ezek alapján az adott egyenlet alakja a gyöktelenítés után a következő lesz:

$$\begin{aligned} & a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 + \\ & 2a^2\{-(q-r)^2 + (r-p)^2 + (p-q)^2\} + 2b^2\{-(q-r)^2 - (r-p)^2 + (p-q)^2\} + \\ & + 2c^2(q-r)^2 + (r-p)^2 - (p-q)^2 + \\ & (p-q)^4 + (q-r)^4 + (r-p)^4 - 2(p-q)^2(q-r)^2 - 2(q-r)^2(r-p)^2 - \end{aligned}$$

$$(2) \quad -2(r-p)^2(p-q)^2 = 0.$$

Az utolsó hat tag összege egyenlő zérussal, mert az (1) alatti kifejezés analógiájára négy tényezőből álló szorzat alakjában fejezhető ki, melynek első tényezője $\{(p-q) + (q-r) + (r-p)\} = 0$.

Ha a , b , c -t egy háromszög három oldalának képzeljük, akkor a (2) alatti kifejezés hat első tagja $= -16t^2$ -tel, hol t alatt a háromszög területét értem.

Vége a középső három tag összege a következőképpen írható:

$$4a^2(p-q)(p-r) + 4b^2(q-r)(q-p) + 4c^2(r-p)(r-q).$$

Ha végre az $\frac{a}{2t}$, $\frac{b}{2t}$, $\frac{c}{2t}$ kifejezések helyett az $\frac{1}{h_1}$, $\frac{1}{h_2}$, $\frac{1}{h_3}$ vagyis az (a, b, c) háromszög három magasságának (h_1, h_2, h_3) reciprokok értékeit vezetjük be, a gyöktelenített egyenlet legegyszerűbb alakja lesz:

$$\frac{(p-q)(p-r)}{h_1^2} + \frac{(q-r)(q-p)}{h_2^2} + \frac{(r-p)(r-q)}{h_3^2} = 1.$$

Arany Dániel.