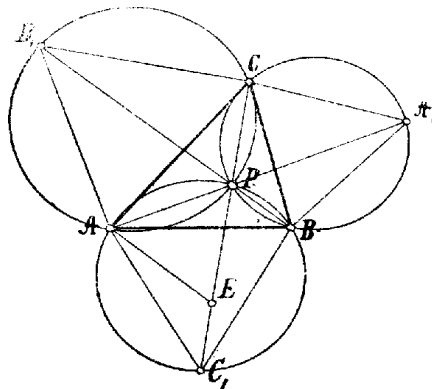


Ismeretes, hogy a háromszög magasságai, szögfelezői, középvonalai és az oldalak középpontjaiban emelt merőlegesek egy-egy pontban metszik egymást, mely pontokat a háromszög nevezetes pontjainak mondjuk.

E négy ponton kívül van még egy, melyet érdekes tulajdonságai miatt a *háromszög ötödik nevezetes pontjának* szoktak nevezni. E pontnak -melyet P -vel jelölünk- néhány nevezetesebb tulajdonságát a következőkben mutatjuk be.

1° E pontból a háromszög oldalai egyenlő szögek alatt látszanak, tehát $\angle APC = \angle CPB = \angle BPA$. Hogy P -t megszerkeszthessük, rajzoljunk az ABC háromszög oldalai fölé egyenlőoldalú háromszögeket; az ezen háromszögek csúcsain átmenő körök a keresett pontban metszik egymást.

Bizonyítás. AC_1BP és BA_1CP húrnégyszögek; $\angle AC_1B = \angle BA_1C = 30^\circ$ s így $\angle APB = \angle BPC = 120^\circ$. Ennélfogva $\angle APC = 120^\circ$ s minthogy $\angle AB_1C = 60^\circ$, azért $APCB_1$ is húrnégyszög s így a harmadik kör is átmegy a P ponton.



2° Az AA_1 , BB_1 és CC_1 egyenesek P pontban metszik egymást.

Bizonyítás. $\triangle ACA_1 \cong \triangle BCB_1$; tehát $\angle CB_1B = \angle CAA_1$ s így CB_1AP húrnégyszög, melyben $\angle APC = 120^\circ$; hasonlóképp kimutathatjuk $\angle APB = \angle BPC = 120^\circ$. E tételt is felhasználhatjuk a P pont megszerkesztésére.

3° $AA_1 = BB_1 = CC_1$, mert $\triangle ACA_1 \cong \triangle BCB_1$ és $\triangle ABA_1 \cong \triangle CBC_1$.

4° $AA_1 = BB_1 = CC_1 = AP + BP + CP$.

Bizonyítás. Minthogy APC_1 és C_1PB egyenlő húrokhoz ($AC_1 = BC_1$) tartozó kerületi szögek, azért $\angle APC_1 = \angle C_1PB = 60^\circ$. Ha P -ből PC_1 -re rámérjük AP -t, úgy hogy $PE = AP$, akkor az APE háromszög egyenlőoldalú s így $AE = AP$; de $AC_1 = AB$ és $\angle AEC_1 = \angle APB = 120^\circ$, tehát $\triangle AEC_1 \cong \triangle APB$, miért is $EC_1 = PB$. Ennélfogva:

$$CC_1 = CP + PE + EC_1 = CP + AP + BP.$$

5° Az ABC háromszög síkjának összes pontjai közül a P pontnak a háromszög csúcsaitól való távolságainak összege a legkisebb. Ha tehát X az ABC síknak egy tetszés szerinti pontja, úgy

$$AP + BP + CP < AX + BX + CX.$$

E tételt *Riesz Frigyes*, lapunk munkatársa, következőképpen bizonyítja:

Az A , B , C pontokban az AP , BP és CP egyenesekre emelt merőlegesek az $A'B'C'$ szabályos háromszöget alkotják.

Jelöljük a tetszés szerint választott X pontnak $A'B'C'$ háromszög oldalaitól való távolságait x_a , x_b és x_c -vel.

Minthogy az $A'B'C'$ háromszög területe egyenlő a $B'X'C'$, $C'XA'$ és $A'XB'$ háromszögek területeinek összegével, azért

$$\frac{am}{2} = \frac{a}{2}(x_a + x_b + x_c),$$

ha az $A'B'C'$ háromszög alapja a , magassága m . Az egyenlet mindkét oldalát $\frac{a}{2}$ -vel osztva, kapjuk hogy:

$$x_a + x_b + x_c = m = \text{állandó}$$

s így

$$AP + BP + CP = x_a + x_b + x_c = m.$$

Ha X az $A'B'C'$ háromszög kerületén belül fekszik, úgy

$$XA \geq x_a, \quad XB \geq x_b, \quad XC \geq x_c$$

tehát

$$XA + XB + XC \geq x_a + x_b + x_c = AP + BP + CP.$$

Az $XA + XB + XC$ összeg minimuma tehát $AP + BP + CP$.

Ha X az $A'B'C'$ háromszög területén kívül fekszik, úgy mindig találunk az ABC háromszög belsejében oly X_1 pontot, melyre nézve

$$AX_1 + BX_1 + CX_1 < AX + BX + CX.$$

Legyen X' , X pontnak tükörképe olyan oldalra, pl. BC -re, vonatkozólag, melytől távolsága negatív. (X távolsága BC -től pozitív, ha X pont a BC által két részre osztott síknak azon oldalán fekszik, melyen A ; ellenkező esetben negatív.) Ekkor $BX' = BX$, $CX' = CX$. Minthogy AXX' háromszög AD középvonala X' felé hajlik, azért $AX' < AX$, tehát

$$AX' + BX' + CX' < AX + BX + CX.$$

Ha X' nem esik a háromszög belsejébe, újbóli vagy többszörös transzformáció után mindig nyerhetünk olyan $X^{(k)}$ pontot, mely a háromszög belsejében fekszik s melyre nézve az

$$X^{(k)} + BX^{(k)} + CX^{(k)}$$

kifejezésnek k növekedésével való folytonos kisebbedésénél fogva:

$$AX^{(k)} + BX^{(k)} + CX^{(k)} < AX + BX + CX.$$

Minthogy pedig

$$AP + BP + CP < AX^{(k)} + BX^{(k)} + CX^{(k)},$$

egyszersmind

$$AP + BP + CP < AX + BX + CX,$$

hol X az ABC sík tetszés szerinti pontja. Hogy pedig X a térnek is tetszés szerinti pontja lehet, abból következik, hogy $AX_1 < AX$, $BX_1 < BX$, $CX_1 < CX$, ha X_1 vetülete X -nek az ABC síkra.