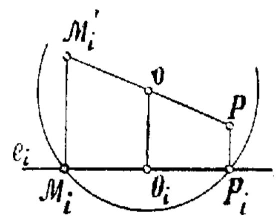
E cikkben egy általános síkgeometriai tétellel foglalkozunk, mely több, a háromszögekre, valamint az egymásra merőleges átlókkal bíró négyszögekre vonatkozó, ismeretes tételt foglal magában.

A tétel a következő:

Ha valamely n-oldalú síkpoligon síkjában van olyan P pont, melyből a poligon oldalaira a $PP_1,\ PP_2, \ldots,\ PP_i,\ \ldots\ PP_n$ merőlegeseket bocsátva, azoknak $P_1,\ P_2, \ldots,\ P_i,\ \ldots\ P_n$ talppontjain keresztül kör rajzolható, akkor e körnek a poligon oldalaival való újabb $M_1,\ M_2, \ldots,\ M_i,\ \ldots\ M_n$ metszéspontjaiban a megfelelő oldalakra emelt merőlegesek egy M pontban találkoznak; a PM egyenes keresztül megy ama kör O középpontján és a PO és OM távolságok egyenlők.

A tétel a következőképpen bizonyítható:

Legyen ei egyenes egy a kívánt tulajdonságú P ponttal bíró poligon i-edik oldala; az O középpontú körnek az ei egyenessel való metszéspontjai P_i és M_i; O_i az O-ból e_i-re bocsátott merőleges talppontja. Legyen végre az M_i pontban e_i-re emelt merőlegesnek PO egyenessel való metszéspontja M_i'.



OO_i merőleges a P_iM_i húrra; tehát:

$$P_iO_i = O_iM_i$$

De a PP_i, OO_i és $M_i'M_i$ egyenesek merőlegesek lévén ei-re, párhuzamos egyenesek és így a párhuzamos szelők törvénye alapján:

$$PO : OM_i' = P_iO_i : O_iM_i$$

vagyis

$$PO = OM_i'.$$

Az i-edik oldalra bemutatott eljárás minden oldalra érvényes lévén, az $M_1,\ M_2, \ldots,\ M_i,\ \ldots\ M_n$ pontokban az $e_1,\ e_2, \ldots,\ e_i,\ \ldots\ e_n$ oldalakra emelt merőlegesek valóban keresztül mennek azon M ponton, mely a PO egyenesen van és pedig úgy, hogy $PO = OM$.

A tétel a háromszögekre nézve következőképpen fogalmazható:

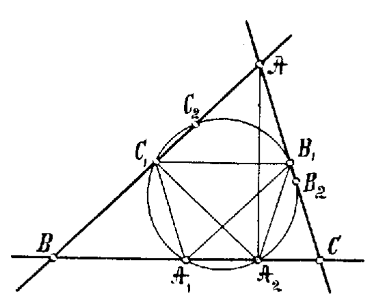
Ha valamely ABC háromszög síkjának egy *tetszőleges* P pontjából az oldalakra merőlegeseket bocsátunk, akkor e merőlegesek $A_1,\ B_1,\ C_1$ talppontjain keresztül vezetett O középpontú körnek az oldalakkal való újabb metszéspontjain állított merőlegesek oly M pontban találkoznak, mely a PO egyenesen van és melyre nézve $MP = 2MO$.

A tétel valóban érvényes a háromszög síkjának bármely pontjára nézve. Az általános fogalmazásnál előforduló $M_1,\ M_2, \ldots,\ M_i,\ \ldots\ M_n$ poligon helyébe itt az $A_1B_1C_1$ háromszög lép, mely köré – mint minden háromszög köré – mindig lehet kört rajzolni.

Itt megemlítjük, hogy a háromszögre specializált tételnek van egy érdekes analogtétele, az ú. n. Reuschle-féle tétel, melyet e helyen bizonyítás nélkül közlünk:

Ha valamely ABC háromszög oldalain az $A_1,\ B_1,\ C_1$ pontok úgy vannak választva, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek egy pontban találkoznak, akkor az $A_1B_1C_1$ háromszög köré írt körnek az ABC háromszög oldalaival való újabb metszéspontjai olyan A_2, B_2, C_2 pontok, melyek a szemben fekvő csúcsokkal összekötve egy pontban találkozó $AA_2,\ BB_2,\ CC_2$ egyeneseket adnak.

Alkalmazzuk már most tételünket arra a speciális esetre, midőn a tetszőlegesen választható P pont az ABC háromszög köré írható kör középpontja. Ekkor a $PA_1,\ PB_1,\ PC_1$ merőlegesek $A_1,\ B_1,\ C_1$ talppontjai a háromszög oldalait felező pontok és az ezeken átvezető O középpont kör az u. n. Feuerbach-féle kör. E körnek a háromszög oldalaival való újabb metszéspontjai – $A_2,\ B_2,\ C_2$ – a magasságok talppontjai.



Valóban: $A_1B_1AC_1$ négyszög parallelogramma lévén:

$$A_1B_1C_1\triangle \cong AC_1B_1\triangle$$

Másrészt

$$A_1B_1C_1\triangle \cong A_2B_1C_1\triangle$$

mert ugyanazon körben parallel húrok között feküsznek.

Tehát

$$A_1B_1C_1\triangle \cong A_2B_1C_1\triangle$$

és mert A pont A_2-nek tükörképe, azért.

$$AA_2 \perp C_1B_1$$

vagy

$$AA_2 \perp CB$$

Az A_2, B_2, C_2 pontok tehát valóban a magasságok talppontjai.

Tételünk értelmében az A_2, B_2, C_2 pontokban az oldalakra emelt merőlegesek egy pontban találkoznak. De a merőlegesek a háromszög magasságvonalai, tehát a háromszög három magassága egy pontban találkozik.

Hasonló módon lehet a Reuschle-féle tétellel a három magasságnak egy pontban való találkozását bizonyítani.

De másrészt tételünk értelmében még szükséges, hogy a P, O és M pontok egy egyenesben legyenek, a mi a következő ismeretes eredményt tartalmazza:

A háromszög köré írható kör középpontja, a Feuerbach-féle kör középpontja és a magassági pont egy egyenesben feküsznek.

Végre ugyancsak tételünk következményeképpen:

$$PO = OM$$

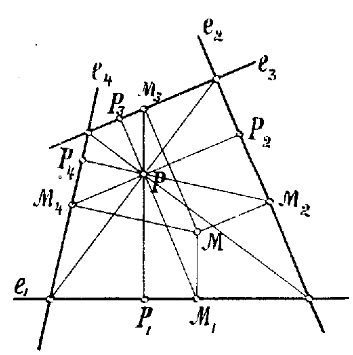
vagyis:

A Feuerbach-féle kör középpontja a háromszög köré írható kör középpontjától, valamint a magassági ponttól egyenlő távolságban van.

Mind ismeretes eredmények, melyeket külön szoktunk bizonyítani, holott látjuk, hogy azok elég könnyen bizonyítható tételünk egyszerű következményei.

Egymásra merőleges átlókkal bíró négyszögekre vonatkozólag ismeretes a következő tétel.

Ha P ilyen négyszög átlóinak metszéspontja, akkor P-ből az oldalakra bocsátott PP_1, PP_2, PP_3 és PP_4 merőlegesek P_1, P_2, P_3 és P_4 talppontjai, valamint e merőlegeseknek a szemben fekvő oldalakkal való M_3, M_4, M_1 és M_2 metszéspontjai egy kör kerületében feküsznek.



Tételünk alapján még azt is állíthatjuk, hogy az M_1, M_2, M_3 és M_4 pontokban a megfelelő oldalakra emelt merőlegesek egy pontban – M-ben – találkoznak.

Budapest.

Weisz Lipót.