1. Határozzuk meg a következő sor összegét:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+6\cdot 7+7\cdot 8+8\cdot 9.$$

Ha e sort megszorozzuk és elosztjuk 3-mal, úgy ered:

$$\frac{1}{3}(1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 3+3\cdot 4\cdot 3+4\cdot 5\cdot 3+5\cdot 6\cdot 3+6\cdot 7\cdot 3+7\cdot 8\cdot 3+8\cdot 9\cdot 3).$$

A zárójelben álló első két tag összege:

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 3=2\cdot 3(1+3)=2\cdot 3\cdot 4.$$

Adjuk ehhez a harmadik tagot:

$$2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 3=3\cdot 4(2+3)=3\cdot 4\cdot 5$$

ezen eljárást megismételve:

$$3\cdot 4\cdot 5+4\cdot 5\cdot 3=4\cdot 5(3+3)=4\cdot 5\cdot 6$$

$$4\cdot 5\cdot 6+5\cdot 6\cdot 3+5\cdot 6(4+3)=5\cdot 6\cdot 7 \textit{ stb.}$$

Ennélfogva

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+6\cdot 7+7\cdot 8+8\cdot 9=\frac{8\cdot 9\cdot 10}{3}.$$

Tehát általánosan

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

2. Határozzuk meg e sor összegét:

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+4\cdot 5\cdot 6+5\cdot 6\cdot 7$$

4-gyel szorozva és osztva:

$$\frac{1}{4}(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5\cdot 4+4\cdot 5\cdot 6\cdot 4+5\cdot 6\cdot 7\cdot 4)$$

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 4=2\cdot 3\cdot 4(1+4)=2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$$

$$2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+3\cdot 4\cdot 5\cdot 4=3\cdot 4\cdot 5\cdot(2+4)=3\cdot 4\cdot 5\cdot 6$$

s így

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+4\cdot 5\cdot 6+5\cdot 6\cdot 7=\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{4}$$

vagy általánosan

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n(n+1)(n+2)=$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

3. Hasonlóképpen találjuk, hogy:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+3\cdot 4\cdot 5\cdot 6+\ldots+$$
$$n(n+1)(n+2)(n+3)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}.$$

Alkalmazások. 1. A természetes számok négyzeteinek összege (lásd: K.M.L.IV. évf. 112. lap.).

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+\ldots$$

$$n(n+1)-(1+2+3+4+\ldots+n)=$$
$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{6}(2n+4-3)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. A természetes számok köbeinek összege. Minthogy

$$n(n+1)(n+2)=n^3+3n^2+2n$$

ezért

$$n^3=n(n+1)(n+2)-3n^2+2n$$

s így

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+$$
$$+\ldots+n(n+1)(n+2)-3(1^2+2^2+3^2++\ldots n^2)-$$
$$-2(1+2+3+\ldots+n)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}-$$
$$-\frac{3n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{2n(n+1)}{2}=$$
$$=\frac{n(n+1)}{4}(n^2+5n+6-4n-2-4)=\frac{n(n+1)}{4}n(n+1)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

3. A természetes számok negyedik hatványainak összege. Minthogy

$$n(n+1)(n+2)(n+3)=n^4+6n^3+11n^2+6n$$

ezért

$$n^4=n(n+1)(n+2)(n+3)-6n^3-11n^2-6n$$

s így

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+3\cdot 4\cdot 5\cdot 6+\ldots+$$
$$+n(n+1)(n+2)(n+3)-6(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)=$$
$$-11(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)-6(1+2+3+\ldots+n)=$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}-\frac{6}{4}n^2(n+1)^2-\frac{11}{6}n(n+1)(2n+1)-3n(n+1)=$$
$$=\frac{n(n+1)}{30}(6n^3+9n^2+n-1)=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Arad.

Fuchs Károly.