

Ha az $A_1A_2A_3$ háromszög síkjának bármely P pontjából az oldalakhoz p_1, p_2, p_3 tetszés szerinti irányú távolságokat húzzuk s ezekhez a megfelelő csúcsokból d_1, d_2, d_3 párhuzamosokat vonjuk, akkor mindig:

$$\frac{p_1}{d_1} + \frac{p_2}{d_2} + \frac{p_3}{d_3} = 1.$$

Megjegyzendő, hogy ez egyenlőség bal oldalán álló összeg bármely tagja pozitív vagy negatív, a szerint, a mint az arányt alkotó távolságok egyenlő vagy ellenkező irányúak.

A tétel bizonyítása legegyszerűbben területek összehasonlítása alapján eszközölhető, de a párhuzamos átszelők tételének gyakorlására is jó alkalmat nyújt.

Bizonyítás. Legyenek a P pontból induló távolságoknak a megfelelő oldalakra eső talppontjai: P_1, P_2, P_3 s a csúcsokból induló megfelelő párhuzamosokéi: A'_1, A'_2, A'_3 , úgy hogy:

$$A_k A'_k = d_k, PP_k = p_k, (k = 1, 2, 3)$$

Képzeljük P pontból az oldalakra bocsátott merőlegeseket, melyeknek talppontjai P_1, P_2, P_3 és a háromszög megfelelő magasságait, melyeknek talppontjai A''_1, A''_2, A''_3 . PA_2A_3 és $A_1A_2A_3$ háromszögek területeinek aránya, egyenlő alapúak lévén, egyenlő a magasságok arányával, azaz:

$$\frac{PA_2A_3}{\Delta} = \frac{PP'_1}{m_1}.$$

Ámde

$$PP'_1P_1\Delta \sim A_1A'_1A'_1\Delta$$

és így

$$(1) \quad \frac{PP'_1}{m_1} = \frac{PP'_1}{A_1A'_1} = \frac{p_1}{d_1} = \frac{PA_2A_3}{\Delta}$$

hol Δ az adott háromszög területe, m_1 az A_2A_3 oldalhoz tartozó magasság.

Teljesen hasonló okokból:

$$(2) \quad \frac{p_2}{d_2} = \frac{PA_3A_1}{\Delta}$$

és

$$(3) \quad \frac{p_3}{d_3} = \frac{PA_1A_2}{\Delta}$$

Az (1), (2), (3) egyenlőségek összeadásából:

$$\frac{p_1}{d_1} + \frac{p_2}{d_2} + \frac{p_3}{d_3} = \frac{PA_2A_3 + PA_3A_1 + PA_1A_2}{\Delta} = 1,$$

mert az egyenlőség jobb oldalán a számláló mindig az adott háromszög területe, algebrai összeg alakjában.

E tétel alapján a háromszögekre vonatkozó több geometriai igazság egyszerűen felírható.

a) Ha P a beírt kör középpontja és $PP_k = \rho$, akkor:

$$\frac{\rho}{m_1} + \frac{\rho}{m_2} + \frac{\rho}{m_3} = 1, \text{ vagy } \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = \frac{1}{\rho}.$$

Ha P az a_k oldalt és a másik kettő megnyújtását érintő kör középpontja:

$$-\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = \frac{1}{\rho_1}, \quad \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = \frac{1}{\rho_2},$$

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_3} = \frac{1}{\rho_3}$$

egyenlőségek állanak, mert ez esetben ρ_k és m_k mindig ellenkező irányúak.

Ez egyenlőségekben foglalt igazságot szóval így fejezhetjük ki: *a háromszög érintő körei bármelyikének görbülete egyenlő a magasságokkal, mint sugarakkal leírt körök görbületeinek algebrai összegével.*

A három utolsó egyenlet összeadása pedig:

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} = \frac{1}{\rho}$$

egyenletre vezet, mely szerint *a kívülről érintő körök görbületeinek összege egyenlő a beírt kör görbületével, vagy a mi egyre megy: a magasságokkal mint sugarakkal leírt körök görbületeinek összegével.*

b) Ha P a körülírt kör középpontja és így:

$$PP'_k = \frac{a_k}{2} \cot A_k,$$

akkor:

$$\frac{a_1}{2m_1} \cot A_1 + \frac{a_2}{2m_2} \cot A_2 + \frac{a_3}{2m_3} \cot A_3 = 1.$$

Ha ez egyenlőség bal oldalán minden tag számlálóját és nevezőjét a_k -val sokszorozzuk: tekintve, hogy $a_1m_1 = a_2m_2 = a_3m_3 = 2\Delta$,

$$a_1^2 \cot A_1 + a_2^2 \cot A_2 + a_3^2 \cot A_3 = 4\Delta$$

ered. A bal oldal egyes tagjai még így is írhatók:

$$\frac{a_1}{\sin A_1} a_1 \cos A_1, \quad \frac{a_2}{\sin A_2} a_2 \cos A_2, \quad \frac{a_3}{\sin A_3} a_3 \cos A_3,$$

melyekben mint ismeretes:

$$\frac{a_1}{\sin A_1} = \frac{a_2}{\sin A_2} = \frac{a_3}{\sin A_3} = 2r,$$

a körülírt kör átmérője, minek tekintetbe vételével az előbbi egyenlet így alakul:

$$r(a_1 \cos A_1 + a_2 \cos A_2 + a_3 \cos A_3) = 2\Delta.$$

Ez egyenlőség szerint *a háromszög kétszeres területe egyenlő a körülírt kör sugara és a talpponti háromszög (beírható minimum területű háromszög) területéből alkotható derékszögű parallelogrammáéval.*

Pécs.

Maksay Zsigmond,
főreáliskolai tanár.