

*Második közlemény.*

A következőkben a tetraéder köré írható gömb sugarát egy csúcsában összefutó három él s az általuk alkotott testszöglet elemeivel fogjuk kifejezni.

E végből legyenek az  $S$  csúcsban összefutó élek hosszúságának mértékszámai:

$$\overline{SA} = a, \quad \overline{SB} = b, \quad \overline{SC} = c;$$

az élek mellett fekvő lapszögek:

$$A, \quad B, \quad C$$

s a velük szembenfekvő élszögek:

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma.$$

Fekessünk az élek szabad végpontjaiban rájuk merőleges síkokat. E síkok kivágják a megfelelő lapszögeket s egy pontban a körülírható gömbnek  $S$ -sel diametralis pontja és  $\overline{SS'} = 2r$  a gömb keresett átmérője.

Az  $S'$  pontban találkozó síkok páronként oly egyenesekben vágják egymást, melyek a tetraéder megfelelő határlapjára merőlegesek. E merőlegesek talppontjai az illető határlapok köré írható köröknek  $S$ -sel diametralis pontjai. Legyenek e pontok  $S_\alpha, S_\beta, S_\gamma$ .

Múlt alkalommal e tárgyra vonatkozó közleményemben kimutattam, hogy az  $SS'_\gamma AS_\beta$  stb. alakú négyszögekben, mint amelyekben két szemben fekvő szög derékszög áll:

$$(1) \quad \overline{S_\beta S_\gamma} = \overline{S'A} \sin A, \quad \overline{S_\gamma S_\alpha} = \overline{S'B} \sin B, \quad \overline{S_\alpha S_\beta} = \overline{S'C} \sin C.$$

Ámde az  $SAS_\gamma B$  stb. négyszögek szintén oly természetűek, hogy:

$$(2) \quad \overline{AB} = \overline{SS_\gamma} \sin \gamma, \quad \overline{BC} = \overline{SS_\alpha} \sin \alpha, \quad \overline{CA} = \overline{SS_\beta} \sin \beta$$

Másfelől azonban:

$$(3) \quad \overline{S_\beta S_\gamma}^2 = \overline{AS_\gamma}^2 + \overline{AS_\beta}^2 - 2\overline{AS_\gamma} \cdot \overline{AS_\beta} \cdot \cos A$$

míg:

$$\overline{AS_\gamma} = \frac{b - a \cos \gamma}{\sin \gamma}, \quad \overline{AS_\beta} = \frac{c - a \cos \beta}{\sin \beta}$$

úgy hogy:

$$\overline{S_\beta S_\gamma}^2 = \left( \frac{b - a \cos \gamma}{\sin \gamma} \right)^2 + \left( \frac{c - a \cos \beta}{\sin \beta} \right)^2 - 2 \cdot \frac{b - a \cos \gamma}{\sin \gamma} \frac{c - a \cos \beta}{\sin \beta} \cos A$$

mely értéknek az (1) egyenlőségnek elsejébe helyettesítésével:

$$(1a.) \quad \overline{SA}^2 = \frac{(b - a \cos \gamma)^2 \sin^2 \beta + (c - a \cos \beta)^2 \sin^2 \gamma - 2(b - a \cos \gamma)(c - a \cos \beta) \sin \beta \sin \gamma \cos A}{\sin^2 A \sin^2 \beta \sin^2 \gamma}$$

Ennek felhasználásával az  $SS'A$  háromszögből:

$$4r^2 = \frac{a^2 \sin^2 A \sin^2 \beta \sin^2 \gamma + (b - a \cos \gamma)^2 \sin^2 \beta + (c - a \cos \beta)^2 \sin^2 \gamma - 2(b - a \cos \gamma)(c - a \cos \beta) \sin \beta \sin \gamma \cos A}{\sin^2 A \sin^2 \beta \sin^2 \gamma}$$

Ha az egyenlőségben a jobb oldal számlálóját a gömháromszögtan megfelelő alapképlete segítségével kellően átalakítjuk, lesz:

$$(4) \quad 4r^2 = \frac{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \sin^2 \beta + c^2 \sin^2 \gamma - 2ab \sin \alpha \sin \beta \cos C - 2ac \sin \alpha \sin \gamma \cos B - 2bc \sin \beta \sin \gamma \cos A}{\sin^2 A \sin^2 \beta \sin^2 \gamma}$$

Ez az eredményszámítás céljából még így is alakítható:

$$4r^2 = \frac{(a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma)^2 - 4 \sin s [ab \sin(s - \gamma) + ac \sin(s - \beta) + bc \sin(s - \alpha)]}{4 \sin s \sin(s - \alpha) \sin(s - \beta) \sin(s - \gamma)}$$

hol  $s = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$  stb. ismert rövid jelzések.

Ha a képletbe a tetraéder köbtartalmát be akarjuk vinni, a (4) egyenlőségnek számlálóját és nevezőjét  $a^2 b^2 c^2$ -vel sokszorozzuk s tekintetbe véve, hogy akkor:

$$bc \sin \alpha = 2t_\alpha, \quad ac \sin \beta = 2t_\beta, \quad ab \sin \gamma = 2t_\gamma, \quad \text{míg:}$$

$$a^2 b^2 c^2 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 \gamma = 36v^2,$$

azaz: a tetraéder 6-szoros köbtartalmának négyzete, a képlet így alakul:

$$4r^2 = \frac{a^4 t_\alpha^2 + b^4 t_\beta^2 + c^4 t_\gamma^2 - 2a^2 b^2 t_\alpha t_\beta \cos C - 2a^2 c^2 t_\alpha t_\gamma \cos B - 2b^2 c^2 t_\beta t_\gamma \cos A}{9v^2}$$

Ha az (1) képletbe az él és lapszögek helyett a tetraéder éleit vesszük be, az  $a$ ,  $b$ ,  $c$ -vel szemben fekvőket  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ -tel jelölve, tekintve, hogy

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a'^2}{2bc}, \quad \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b'^2}{2ac}, \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c'^2}{2ab},$$

tehát:

$$\sin^2 \alpha = \frac{4b^2 c^2 - (b^2 + c^2 - a'^2)^2}{4b^2 c^2}$$

stb. és

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos C = \cos \gamma - \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

stb., a kellő összevonások után:

$$4r^2 = \frac{2a^2 b^2 a'^2 b'^2 + 2a^2 c^2 a'^2 c'^2 + 2b^2 c^2 b'^2 c'^2 - a^4 a'^4 - b^4 b'^4 - c^4 c'^4}{4a^2 b^2 c^2 \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \sin^2 A}$$

Ebben a kifejezésben a számláló:

$$4b^2 c^2 b'^2 c'^2 - (b^2 b'^2 + c^2 c'^2 - a^2 a'^2)^2$$

alakban írható, mely tényezőkre bontva:

$$(a'a + bb' + cc')(-aa' + bb' + cc')(aa' - bb' + cc')(aa' + bb' - cc')$$

alakot ölt, míg a nevező a köbtartalom tizenkétszeresének négyzete úgy, hogy végeredményben:

$$4r^2 = \frac{(a'a + bb' + cc')(-aa' + bb' + cc')(aa' - bb' + cc')(aa' + bb' - cc')}{(12V)^2}$$

A számláló a szemben fekvő élekből alkotható derékszögű paralelogrammák területeiből alakult 8-ad rendű térmennyiség s tekinthető oly háromszög területe 16-szoros négyzetének is, melyben az oldalak mértékszámai  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$ .

E képletek inkább érdekes voltuknál fogva s gyakorlat céljából érdemelnek figyelmet, mert számításra a múlt alkalommal kifejtett alak határozottan használhatóbb.