

Legyen az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéder egy tetszés szerint vett éle. pl. $\overline{A_1A_2} = a$, ez él mellett fekvő lapszöge A , s az $A_1A_2A_3$ és $A_1A_4A_2$ lapokban a közös a éllel szembenfekvő élszögek $A_1A_3A_2 = \alpha$, illetőleg $A_1A_4A_2 = \alpha'$.

Fektessünk az $\overline{A_1A_2}$ él A felező pontjában rá merőleges síkot, mely geometriai helye mindazoknak a pontoknak, melyek A_1 és A_2 csúcsoktól egyenlő távolságban vannak. E sík kivágja az A lapszöget s keresztülmegy egyszersmind az $A_1A_2A_3$ és $A_1A_4A_2$ lapok köré írható körök középpontjain. Legyenek O_1 és O_2 az említett körök középpontjai, melyekben a lapjaikra emelt merőlegesek a keresett gömb O középpontjában találkoznak, mert e pont származásánál fogva, valamennyi csúcsból egyenlő távolságban van.

Az OAA_1 derékszögű háromszögből

$$(1) \quad \overline{OA_1}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AA_1}^2$$

hol: $\overline{OA_1} = r$ a gömb keresett sugara:

$$\overline{AA_1} = \frac{a}{2}$$

föltétel szerint és OA az OO_2AO_1 négyszög köré írható kör átmérője, mert e négyszögnek O_2 és O_1 -nél lévő szögei, származásuknál fogva derékszögek, minél fogva:

$$(2) \quad \overline{OA}^2 = \overline{OO_2}^2 + \overline{O_2A}^2 = \overline{OO_1}^2 + \overline{O_1A}^2$$

Bocsássunk O_2 -ből O_1A -ra merőlegest, melynek talppontja H , és O -ból O_2H -ra egy másikat, melynek talppontja K . Látni való, hogy; $O_2KO\Delta \sim O_2HA\Delta$ és így: $OO_2K = A$, tehát:

$$\overline{OO_2} = \frac{\overline{OK}}{\sin A} = \frac{\overline{O_1H}}{\sin A}$$

Ámde $\overline{O_1H} = \overline{O_1A} - \overline{HA} = \overline{O_1A} - \overline{O_2A} \cos A$, mely érték helyettesítésével

$$\overline{OO_2} = \frac{\overline{O_1A} - \overline{O_2A} \cos A}{\sin A}$$

Ha ez értéket (2)-be tesszük és összevonunk:

$$(2a) \quad \overline{OA}^2 = \frac{\overline{O_1A}^2 + \overline{O_2A}^2 - 2\overline{O_1A} \cdot \overline{O_2A} \cos A}{\sin^2 A}$$

Ez értéket (1)-be téve és tekintve, hogy

$$\overline{O_1A} = \frac{a}{2} \cot \alpha, \quad \overline{O_2A} = \frac{a}{2} \cot \alpha', \text{ ered :}$$

$$(1a) \quad r^2 = \frac{a^2}{4 \sin^2 A} (\sin^2 A + \cot^2 \alpha + \cot^2 \alpha' - 2 \cot \alpha \cot \alpha' \cos A)$$

honnan:

$$r = \frac{a}{2 \sin A} \sqrt{(\sin^2 A + \cot^2 \alpha + \cot^2 \alpha' - 2 \cot \alpha \cot \alpha' \cos A)}.$$

a keresett gömbsugár meghatározására szolgáló képlet a felvett adatokból. Ez adatok természetesen nem határozzák meg a tetraédert, mert csak két egymást az "a" közös hűrvégpontjaiban metsző gömbkört és lapjaik hajlásszögét tartalmaznak, tehát mindazon tetraéderek köré írható gömb sugarát adják, mely tetraéderek már két csúcsa e gömbkörök területében lehet.

A képlet nemcsak számításra, hanem szerkesztésre is alkalmas. E célból kössük össze A_1 pontot O_1 és O_2 -vel. Az összekötő egyenesek vágják a megfelelő köröket A'_3 és A'_4 pontokban.

A származott új tetraéderben már a él merőleges az A'_3A_2A' lapra az elébbi adatok változatlanul maradván. és

$$A_2A'_3 = a \cdot \cot \alpha \quad \text{és} \quad A_2A'_4 = a \cdot \cot \alpha'$$

$$\overline{A'_3A'_4}^2 = a^2 \cot^2 \alpha + a^2 \cot^2 \alpha' - 2a^2 \cot \alpha \cot \alpha' \cos A,$$

mely érték helyettesítésével:

$$r^2 = \frac{1}{4} \left(a^2 + \frac{\overline{A'_3A'_4}^2}{\sin^2 A} \right)$$

Ha most $A'_3A'_4$ -et A_2 pontban a $A'_3A_2A'_4$ síkjához AA'_3 -re merőlegesen felrakjuk szabad végpontján át A_2A_4 -tel párhuzamost húzunk, ennek $A_2A'_4$ -tel való metszéspontja oly X pont, melynek A_1 -gyel való összeköttetése

$$\overline{A'X} = 2r.$$

Egyéb iránt a szerkesztés (1) alapján is eszközölhető.

A (2a) egyenlőségből kitűnik, hogy az előbbieken említett OO_2A_1O négyszögnek s így mindazoknak, melyeknek két szemben fekvő szöge derékszög, átlói közt ez összefüggés áll:

$$\overline{O_1O_2} = \overline{OA} \sin A,$$

mert (2a) a jobb oldalán a számláló tényleg:

$$\overline{O_1O_2}^2 = \overline{O_1A}^2 + \overline{O_2A}^2 - 2 \overline{O_1A} \cdot \overline{O_2A} \cos A.$$

Maksay Zsigmond.