

A helymeghatározásról a síkban.

(Második közlemény.)

V.

A következőkben a tanult módszereket néhány egyszerűbb feladat megoldására kívánom alkalmazni.

A. 1. *Adva vannak két pont koordinátái: a_1, a_2, a_3 ; b_1, b_2, b_3 ; kerestetik a két ponton keresztül menő egyenes egyenlete.* Az egyenes általános egyenlete mint láttuk, a következő volt:

$$(1) \quad \tau_1 x_1 + \tau_2 x_2 + \tau_3 x_3 = 0$$

Ha ezen egyenlet által ábrázolt egyenes keresztül megy az $A(a_1 a_2 a_3)$ és $B(b_1 b_2 b_3)$ pontokon, akkor ezek koordinátái a fentebbi egyenletbe helyettesítve, azt azonosan egyenlítik a zérussal. Vagyis:

$$(2) \quad \tau_1 a_1 + \tau_2 a_2 + \tau_3 a_3 = 0$$

$$(3) \quad \tau_1 b_1 + \tau_2 b_2 + \tau_3 b_3 = 0$$

Ha az (1), (2) és (3)-ból kiküszöböljük a τ_1, τ_2, τ_3 értékét az AB egyenes egyenletét nyerjük; a kiküszöbölés eredménye a következő determináns-egyenlet:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

vagy részletesebben:

$$(a_2 b_3 - b_2 a_3)x_1 + (a_3 b_1 - b_3 a_1)x_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)x_3 = 0$$

2. *Ha két háromszög, ABC és $A'B'C'$, ugyanazon betűvel jelzett szögpontjainak összekötő egyenesei egy pontban S -ben találkoznak, akkor egyenlő oldaluk metszéspontjai: $S_1 \equiv (BC, B'C')$, $S_2 \equiv (CA, C'A')$, $S_3 \equiv (AB, A'B')$ egy egyenesben, s -ben metszik egymást.*

Válasszuk az $A'B'C'$ háromszöget koordináta-háromszögül és az S pontot egységpontul. Minthogy az $A'B'C'$ pontok koordinátái rendre:

$$\begin{matrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{matrix}$$

az SA', SB', SC' egyenesek egyenletei a következők lesznek:

$$x_2 - x_3 = 0$$

$$x_2 - x_1 = 0$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

Az A, B, C pontok koordinátái ekkor:

$$a_1, a_2 = a_3$$

$$b_2, b_3 = b_1$$

$$c_3, c_1 = c_2$$

Az $AB', B'C', C'A'$ egyenesek egyenletei:

$$x_3 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0$$

és az AB, BC, CA egyenesekéi:

$$x_1 a_2 (b_3 - b_2) + x_2 b_3 (a_3 - a_1) + x_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

$$x_1 (b_2 c_3 - b_3 c_1) + x_2 c_3 (c_1 - c_3) + x_3 c_1 (b_3 - b_2) = 0$$

$$x_1 a_2 (c_1 - c_3) + x_2 (c_3 a_1 - c_1 a_2) + x_3 c_1 (a_2 - a_1) = 0$$

Az S_1, S_2, S_3 pontok koordinátái tehát:

$$0, -\lambda c_1 (b_3 - b_2), \lambda b_3 (c_1 - c_3);$$

$$\begin{aligned} & \mu c_1 (a_2, -a_1), 0, \mu a_2(c_1 - c_3); \\ & -\nu b_3(a_2 - a_1), \nu a_2(b - 3 - b_2), 0; \end{aligned}$$

s a feltétele annak, hogy e három pont egy egyenesben fekszen a következő determináns-egyenlet:

$$\begin{vmatrix} 0 & -\lambda c_1(b_3 - b_2) & \lambda b_3(c_1 - c_3) \\ \mu c_1 & (a_2 - a_1) & \mu a_2(c_1 - c_3) \\ -\nu b_3 & (a_2 - a_1) & \nu a_2(b_3 - b_2) \end{vmatrix} = 0$$

vagy részletesebben:

$$\begin{aligned} & \mu \nu \lambda c_1 a_2 b_3 (a_2 - a_1) (b_3 - b_2) (c_1 - c_3) - \\ & - \nu \lambda \mu b_3 c_1 a_2 (a_2 - a_1) (b_3 - b_2) (c_1 - c_3) \equiv 0, \end{aligned}$$

mely kifejezésről rögtön szembetűnő, hogy azonosan egyenlő a zérussal.

B. 1'. Adva vannak két egyenes koordinátái: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ; \beta_1, \beta_2, \beta_3$; *keresztetik a két egyenes metszéspontjának egyenlete.*

A pont általános egyenlete mint láttuk, a következő volt:

$$(1) \quad x_1 \tau_1 + x_2 \tau_2 + x_3 \tau_3 = 0$$

Ha az ezen egyenlet által ábrázolt ponton keresztül mennek az $\alpha(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ és $\beta(\beta_1 \beta_2 \beta_3)$ egyenesek, akkor ezek koordinátái a fentebbi egyenletbe helyettesítve, azt azonosan egyenlítik a zérussal. Vagyis:

$$(2) \quad x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = 0$$

$$(3) \quad x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2 + x_3 \beta_3 = 0$$

Ha az (1), (2) és (3)-ból kiküszöböljük a x_1, x_2, x_3 értékeket az $(\alpha\beta)$ pont egyenletét nyerjük; a kiküszöbölés eredménye a következő determináns-egyenlet:

$$\begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

vagy részletesebben:

$$\begin{aligned} & (\alpha_2 \beta_3 - \beta_2 \alpha_3) \tau_1 + (\alpha_3 \beta_1 - \beta_3 \alpha_1) \tau_2 + \\ & + (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2) \tau_3 = 0 \end{aligned}$$

2'. Ha két háromszög, ABC és $A'B'C'$, ugyanazon betűvel jelzett oldalainak metszéspontjai egy egyenesben s -ben fekszenek, akkor egyenlő szögpontjainak összekötő egyenesei: $s_1 \equiv AA', s_2 \equiv BB', s_3 \equiv CC'$ egy pontban, S -ben találkoznak.

Válasszuk az $A'B'C'$ háromszöget koordináta-háromszögül és az s egyenest egység-egyenessül. Minthogy az $a'b'c'$ oldalak koordinátái rendre:

$$\begin{aligned} & \alpha' \ 0 \ 0 \\ & 0 \ \beta' \ 0 \\ & 0 \ 0 \ \gamma' \end{aligned}$$

az $(sa'), (sb'), (sc')$ pontok egyenletei a következők lesznek:

$$\tau_2 - \tau_3 = 0$$

$$\tau_3 - \tau_1 = 0$$

$$\tau_1 - \tau_2 = 0$$

Az a, b, c egyenesek koordinátái ekkor:

$$\alpha_1, \alpha_2 = \alpha_3$$

$$\beta_2, \beta_3 = \beta_1$$

$$\gamma_3, \gamma_1 = \gamma_2$$

A C', A', B' pontok egyenletei:

$$\tau_3 = 0, \tau_1 = 0, \tau_2 = 0$$

és a C , A , B pontokéi:

$$\tau_1\alpha_2(\beta_3 - \beta_2) + \tau_2\beta_3(\beta_2 - \beta_1) + \tau_3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_2) = 0$$

$$\tau_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_1) + \tau_2\beta_3(\gamma_1 - \gamma_3) + \tau_3\gamma_1(\beta_3 - \beta_2) = 0$$

$$\tau_1\alpha_2(\gamma_1 - \gamma_3) + \tau_2(\gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_2) + \tau_3\gamma_1(\alpha_2 - \alpha_1) = 0$$

Az s_1 , s_2 , s_3 egyenesek koordinátái tehát:

$$0, -\lambda\gamma(\beta_3 - \beta_2), \lambda\beta_3(\gamma_1 - \gamma_3);$$

$$\mu\gamma_1(\alpha_2 - \alpha_1), 0, \mu\alpha_2(\gamma_1 - \gamma_3);$$

$$-\nu\beta_3(\alpha_2 - \alpha_1), \nu\alpha_2(\beta_3 - \beta_2), 0;$$

s a feltétele annak, hogy e három egyenes egy pontban találkozzék a következő determináns-egyenlet:

$$\begin{vmatrix} 0 & -\lambda\gamma(\beta_3 - \beta_2) & \lambda\beta_3(\gamma_1 - \gamma_3) \\ \mu\gamma_1(\alpha_2 - \alpha_1) & 0 & -\mu\alpha_2(\gamma_1 - \gamma_3) \\ -\nu\beta_3(\alpha_2 - \alpha_1) & \nu\alpha_2(\beta_3 - \beta_2) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

vagy részletesebben:

$$\begin{aligned} & \mu\nu\lambda\gamma_1\beta_3(\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_3 - \beta_2)(\gamma_1 - \gamma_3) - \\ & -\nu\lambda\mu\beta_3\gamma_1\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_3 - \beta_2)(\gamma_1 - \gamma_3) \equiv 0 \end{aligned}$$

mely kifejezésről rögtön szembetűnő, hogy azonosan egyenlő a zérussal.

Arany Dániel