

A Ceva-féle tétel és alkalmazása.

A síkháromszögeknél előforduló tételek, melyek a középvonalak, szögfelezők és magasságok egy-egy pontban találkozására vonatkoznak, vagy meglehetősen nehézkes módon, vagy éppen nincsenek bizonyítva tankönyveinkben, melyek az e tekintetben felette fontos Ceva-féle tételt sem közlik; pedig mint a párhuzamos átszelőkről tanultak egyik alkalmazását és a Menelaus-féle tétel társát, minden nehézség nélkül fölvehetnék részben, mint az említettem tételek egyszerű bizonyításának eszközét, részben mint adott három elemhez a negyedik harmonikus szerkesztésének igazolási módját.

A tétel így szól: Ha a háromszög csúcsain át oly egyeneseket húzunk, melyek a sík egy pontján mennek át: a szemben fekvő oldalakon, illetőleg megnyújtásaikon származó metszéspontok úgy osztják ez oldalakat, hogy a szeletekből képezett arányok szorzata a negatív egység, azaz, ha A, B, C a háromszög csúcsai és A_1, B_1, C_1 a mondott módon keletkezett metszéspontok:

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = -1$$

hol az egyes arányok jele elemeik egyenlő, vagy ellenkező iránya szerint veendő pozitív, vagy negatív értelemben.

A tétel bizonyítása így is eszközölhető:

Legyen P az AA_1, BB_1, CC_1 sugarak metszéspontja.

Az APB, BPC, CPA háromszögek ketten-ketten közös BP, CP, AP alapon állván, területeik úgy aránylanak, mint magasságaik, ez utóbbiak pedig a származott hasonló háromszögek folytán mint a közös alap megnyújtása által AC, AB, BC oldalakon keletkezett szeletek, azaz:

$$APB : BPC = B_1A : CB_1$$

$$BPC : CPA = C_1B : C_1A$$

$$CPA : APB = A_1C : A_1B$$

mely aránylatok megfelelő tagjainak szorzása által:

$$1 : 1 = A_1C \cdot C_1B \cdot B_1A : A_1B \cdot C_1A \cdot CB_1$$

honnan:

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = -1,$$

mert az arányok mindannyia negatív, ha P a háromszög belsejében fekszik, vagy egy közülük negatív, ha P a háromszögön kívül van.

A tétel megfordítható, mint minden általános állító tétel. A megfordítás így fogalmazható: ha a háromszög három oldalán úgy választjuk az A_1, B_1, C_1 pontokat, hogy a szeletekből képezett arányok szorzata a negatív egység: az AA_1, BB_1, CC_1 sugarak egy ponton mennek át.

Alkalmazás.

1. A középvonalak egy pontban, a súlypontban találkoznak, mert az esetben $A_1B = -A_1C, B_1C = -B_1A, C_1A = -C_1B$

és így:

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = (-1)^3 = -1$$

2. A háromszög belső szögeit felező egyenesek egy pontban találkoznak, mert ez esetben:

$$\frac{A_1B}{A_1C} = -\frac{c}{b}, \quad \frac{B_1C}{B_1A} = -\frac{a}{c}, \quad \frac{C_1A}{C_1B} = -\frac{b}{a}$$

és így

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{abc}{abc} = -1$$

2a. A háromszög egyik szögét és a másik kettő mellékszögeit felező egyenesek egy pontban találkoznak, mert pl. az $A, (\pi - B), (\pi - C)$ szögeket vévén:

$$\frac{A_1B}{A_1C} = -\frac{c}{b}, \quad \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{a}{c}, \quad \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{b}{a}$$

és így

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = -\frac{abc}{abc} = -1.$$

Az m_a, m_b, m_c magasságok egy pontban találkoznak, mert a keletkezett hasonló háromszögekből: (Egyszerűség kedvéért geometriai függvényeket használva)

$$\frac{A_1B}{A_1C} = -\frac{c \cos B}{b \cos C}, \quad \frac{B_1C}{B_1A} = -\frac{a \cos C}{c \cos A}, \quad \frac{C_1A}{C_1B} = -\frac{b \cos A}{a \cos B}$$

és így

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{abc \cos A \cos B \cos C}{abc \cos A \cos B \cos C} = -1$$

Hasonló módon alkalmazhatni egyes esetekben a Menelaus-féle tételt három pontnak egy egyenesben fekvése kritériumául.

Maksay Zsigmond.