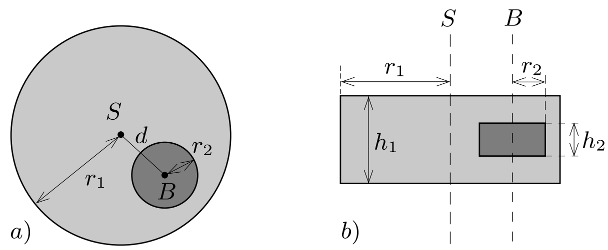
1. feladat. Két mechanikai probléma (összesen *10 pont*).

A rész. Elrejtett korong (*3,5 pont*)

Tekintsünk egy tömör, fából készült, r_1 sugarú és h_1 vastagságú hengert. A fahenger belsejében valahol a fa anyaga helyett egy r_2 sugarú és h_2 vastagságú fémkorong található. A fémkorong úgy helyezkedik el, hogy B szimmetriatengelye párhuzamos a fahenger S tengelyével, és ugyanakkora távolságra van a fahenger alsó és felső alaplapjától. Jelöljük S és B távolságát d-vel! A fa sűrűsége ϱ_1, a fém sűrűsége pedig $\varrho_2 > \varrho_1$. A fahenger és a fémkorong össztömege M.

Ebben a részben a fahengert a földre helyezzük, így jobbra és balra szabadon tud gördülni. Az elrendezés oldal- és felülnézetben az *1. ábrán* látható.



1. ábra. *a*) oldalnézet; *b*) felülnézet

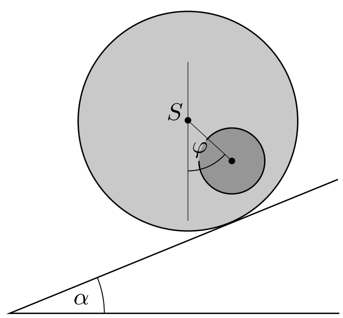
Ebben a feladatban a fémkorong méretét és helyét kell meghatározni.

A következőkben, ha a választ az ismert mennyiségekkel kell kifejeznünk, mindig az alábbiakat tekinthetjük ismertnek:

$$r_1, \quad h_1, \quad \varrho_1, \quad \varrho_2 \text{ és } M. \tag{1}$$

A cél r_2, h_2 és d meghatározása indirekt méréseken keresztül.

Jelöljük b-vel a teljes rendszer C tömegközéppontjának és a fahenger S szimmetriatengelyének távolságát! Ennek a távolságnak a meghatározásához a következő kísérletet tervezzük: a fahengert vízszintes alapra helyezzük úgy, hogy stabil egyensúlyban legyen. Az alapot lassan megdöntjük α szöggel (*2. ábra*). A tapadási súrlódás miatt a fahenger csúszás nélkül gördülhet. A henger egy kicsit lejjebb gördül a lejtőn, de végül valamekkora φ szögelfordulás után a stabil egyensúlyi helyzetben megáll. A φ szöget megmérhetjük.

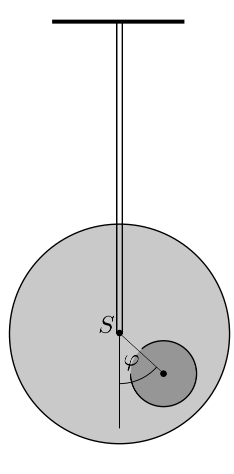


2. ábra. A henger a lejtőn

A.1. *Fejezzük ki b-t az (1)-ben felsorolt mennyiségek, a φ szög és az α hajlásszög függvényében!* (0,8 pont)

Mostantól kezdve b értékét ismertnek tekinthetjük.

A továbbiakban szeretnénk megmérni a rendszer Θ_S tehetetlenségi nyomatékát az S szimmetriatengelyre vonatkoztatva. Ehhez egy mereven rögzített rúddal felfüggesztjük a fahengert a szimmetriatengelyénél. Ezután az egyensúlyi helyzetéből kicsiny φ szöggel kitérítjük, majd elengedjük (*3. ábra*). Azt találjuk, hogy φ periodikusan változik T periódusidővel.



3. ábra. A felfüggesztett rendszer

A.2. *Határozzuk meg φ mozgásegyenletét! Fejezzük ki a hengernek az S szimmetriatengelyére vonatkoztatott Θ_S tehetetlenségi nyomatékát T, b és az (1)-ben felsorolt, ismert mennyiségek segítségével! Feltételezhetjük, hogy az egyensúlyi helyzettől való kitérés kicsi, így φ a mozgás során mindvégig igen kicsiny marad.* (*0,5 pont*)

Az **A.1.** és **A.2.** részfeladatok mérései alapján szeretnénk meghatározni a fahengerben található fémkorong geometriáját és elhelyezkedését.

A.3. *Fejezzük ki a d távolságot b és az* (1)*-ben szereplő mennyiségek segítségével. A formulában az r_2 és h_2 mennyiségeket is használhatjuk, hiszen ezeket az* **A.5.** *pontban meg fogjuk határozni.* (*0,4 pont*)

A.4. *Fejezzük ki az Θ_S tehetetlenségi nyomatékot b és az* (1)*-ben szereplő, ismert mennyiségek segítségével. A formulában az r_2 és h_2 mennyiségeket is használhatjuk, hiszen ezeket az* **A.5.** *pontban meg fogjuk határozni.* (*0,7 pont*)

A.5. *A fenti eredményeket felhasználva fejezzük ki h_2 és r_2 értékét b, T és* (1)*-ben szereplő, ismert mennyiségek segítségével. A h_2 mennyiséget kifejezhetjük r_2-vel is.* (*1,1 pont*)

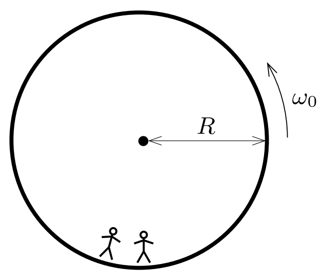
B rész. Forgó űrállomás (*6,5 pont*)

Alice egy űrállomáson lakó űrhajós. Az űrállomás egy óriási, R sugarú kerék, amely a tengelye körül forog, így biztosítva a mesterséges gravitációt az asztronauták számára. Az űrhajósok a kerék peremének belső oldalán élnek. Az űrállomás gravitációs vonzása és a padló görbültsége elhanyagolható.

B.1. *Mekkora ω_0 szögsebességgel forog az űrállomás, ha az űrhajósok ugyanakkora g_{F} gravitációs gyorsulást éreznek, mint a Föld felszínén?* (*0,5 pont*)

Alice és űrhajós barátja, Bob vitatkoznak. Bob nem hiszi el, hogy valóban egy űrállomáson élnek, szerinte ténylegesen a Földön tartózkodnak. Alice fizikai módszerrel szeretné bebizonyítani Bobnak, hogy egy forgó űrállomáson élnek. Ezért egy m tömegű testet rögzít egy k rugóállandójú rugó végére, majd rezgésbe hozza. A test csak függőleges irányban rezeghet, vízszintesen nem tud mozogni.

B.2. *Feltételezve, hogy a Földön a gravitációs gyorsulás állandó g_{F}, mekkorának mérné a rezgés ω_{F} körfrekvenciáját egy Földön lévő személy?* (*0,2 pont*)



4. ábra. Az űrállomás

B.3. *Mekkora ω körfrekvenciát mér Alice az űrállomáson?* (*0,6 pont*)

Alice meg van győződve arról, hogy a kísérlete bizonyíték arra, hogy egy forgó űrállomáson élnek. Bob szkeptikus marad. Szerinte ha a gravitációs tér Föld felszíne feletti változását is figyelembe vesszük, annak hasonló hatása van. A továbbiakban azt vizsgáljuk, igaza van-e Bobnak.

B.4. *Fejezzük ki a $g_{\mathrm{F}}(h)$ gravitációs gyorsulást kicsiny h magasságban a Föld felszíne fölött, és számítsuk ki a rezgő test $\widetilde{\omega_{\mathrm{F}}}$ körfrekvenciáját (elég a lineáris közelítés). A Föld sugarát jelölje R_{F}. A Föld forgását figyelmen kívül hagyhatjuk.* (*0,8 pont*)

Alice azt találja, hogy ezen az űrállomáson a rezgő test valóban a Bob által jósolt frekvenciával rezeg.

B.5. *Mekkora az űrállomás R sugara, ha a rezgés ω körfrekvenciája megegyezik a Földön mérhető $\widetilde{\omega_{\mathrm{F}}}$ körfrekvenciával? A választ R_{F} segítségével adjuk meg.* (*0,3 pont*)

Bob makacsságán feldühödve Alice egy új kísérlettel áll elő saját igazának bizonyítására. Ezért felmászik az űrállomás padlója fölé H magasságba egy toronyra, és elejt egy testet. Ez a kísérlet értelmezhető a forgó vonatkoztatási rendszerben éppúgy, mint az inerciarendszerben.

Egy egyenletesen forgó vonatkoztatási rendszerben az űrhajós egy fiktív $\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}$ erőt tapasztal, amit *Coriolis-erőnek* nevezünk. Az állandó ω_0 szögsebességgel forgó rendszerben $\boldsymbol{v}$ sebességgel mozgó, m tömegű testre ható $\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}$ Coriolis-erőt a következő összefüggés adja meg:

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}} = 2m\boldsymbol{v} \times \omega_0.$$

Használható a skaláris mennyiségekre vonatkozó

$$F_C = 2mv\omega_0 \sin\varphi$$

alak, ahol φ a sebességvektor és a forgástengely közötti szög. Az erő merőleges mind a $\boldsymbol{v}$ sebességvektorra, mind pedig a forgástengelyre. Az erő előjele a jobbkéz-szabály alapján határozható meg, de ez az előjel a következőkben szabadon választható.

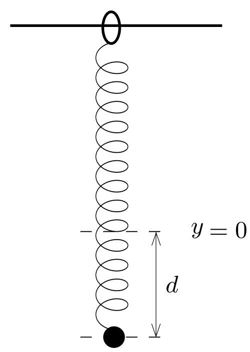
B.6. Számítsuk ki a test v_x vízszintes sebességét és a vízszintes d_x elmozdulását (a torony aljához képest, a toronyra merőleges irányban) a padlóra érés pillanatában. Feltehetjük, hogy a torony H magassága kicsiny, így az űrhajósok által mért gyorsulás az esés alatt állandó. Feltételezhető továbbá, hogy $d_x \ll H$. (*1,1 pont*)

Hogy jobb eredményt kapjon, Alice úgy dönt, hogy a kísérletet egy, a korábbinál sokkal magasabb toronyról is elvégzi. Meglepetésére a test a torony aljánál éri el a padlót, azaz $d_x = 0$.

B.7. *Határozzuk meg a torony magasságának alsó korlátját, amelyre $d_x = 0$ lehetséges.* (*1,3 pont*)

Alice szeretne még egy utolsó kísérletet tenni Bob meggyőzésére. A rugós rendszert szeretné használni a Coriolis-erő hatásának szemléltetésére. Ezért megváltoztatja az eredeti elrendezést: a rugót egy olyan gyűrűhöz rögzíti, amely szabadon és súrlódásmentesen csúszhat az x irányban egy vízszintes rúdon. A rugó maga az y irányban rezeg. A rúd párhuzamos a talajjal és merőleges az űrállomás forgástengelyére. Az $x - y$ sík tehát merőleges a forgástengelyre, az y irány pedig egyenesen az űrállomás forgástengelye felé mutat.

B.8. *Alice a testet az $x = 0$, $y = 0$ egyensúlyi állapotából d távolsággal kitéríti lefelé, majd elengedi* (*lásd az* 5. ábrát).



5. ábra. Az elrendezés

(*i*) *Fejezzük ki az $x(t)$ és $y(t)$ mennyiségeket. Feltehetjük, hogy $\omega_0 d$ kicsi, és elhanyagolhatjuk az y irányú Coriolis-erőt.*

(*ii*) *Vázoljuk fel az $\big(x(t), y(t)\big)$ pályát, és jelöljük minden fontos tulajdonságát, mint pl. az amplitúdóját.* (*Összesen 1,7 pont*)

Alice és Bob folytatja vitáját …