

Jelölje $\mathbb{Q}_{>0}$ a pozitív racionális számok halmazát. Legyen $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, ami kielégíti az alábbi három feltételt:

- (i) Minden $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ -ra $f(x)f(y) \geq f(xy)$;
- (ii) Minden $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ -ra $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;
- (iii) Létezik olyan $a > 1$ racionális szám, amire $f(a) = a$.

Bizonyítsuk be, hogy $f(x) = x$ minden $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ -ra.