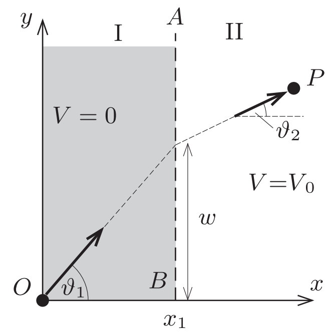
2. feladat. A szélsőértékelv (összesen *10 pont*).

A rész. Szélsőértékelv a mechanikában

Tekintsünk egy vízszintes, súrlódásmentes x-y síkot (*1. ábra*). A síkot az $x = x_1$ egyenlettel megadott AB egyenes két, I és II jelű tartományra osztja. Egy m tömegű, pontszerű test helyzeti energiája az I-es tartományban $V = 0$, míg a II-es tartományban $V = V_0$. A részecskét az O origóból v_1 sebességgel indítjuk el egy, az x tengellyel ϑ_1 szöget bezáró egyenes mentén. A II-es tartományban lévő P pontot v_2 sebességgel éri el egy, az x tengellyel ϑ_2 szöget bezáró egyenes mentén.



1. ábra

A gravitációt és a relativisztikus hatásokat a feladat minden részében elhanyagolhatjuk.

A.1. *Fejezzük ki v_2-t az m, v_1 és V_0 mennyiségek segítségével!* (*0,2 pont*)

A.2. *Adjuk meg v_2-t v_1, ϑ_1 és ϑ_2 segítségével!* (*0,3 pont*)

Definiálunk egy (hatásnak nevezett) $A = m\int v(s)\,\mathrm{d}s$ mennyiséget, ahol $\mathrm{d}s$ a $v(s)$ sebességgel mozgó m tömegű részecske „infinitezimálisan kicsi" elmozdulása a pályája mentén. Az integrálást a pályagörbe mentén kell elvégezni.

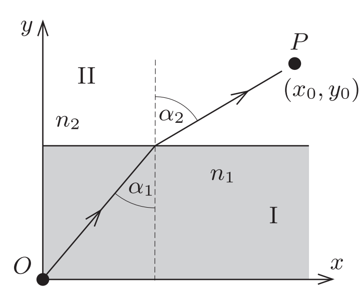
Példaként, ha egy részecske állandó v sebességgel mozog egy R sugarú körpályán, akkor az A hatás 1 fordulat alatt $2\pi mRv$ lesz.

Ha a részecske E energiája állandó, akkor megmutatható, hogy két rögzített végpont között az összes lehetséges pálya közül a részecske ténylegesen azon a pályán fog mozogni, amelyen kiszámítva az A hatásnak szélsőértéke (minimuma vagy maximuma) van. Történeti okokból ezt a szélsőértékelvet a *legkisebb hatás elvének* (LHE) nevezik.

A.3. *A LHE-ből következik, hogy ha egy részecske olyan tartományban mozog, ahol a helyzeti energia állandó, a pályája a két rögzített pont közötti egyenes szakasz lesz. Legyenek az 1. ábrán látható O és P rögzített pontok koordinátái* $(0,0)$, *illetve* (x_0, y_0), *továbbá annak a határpontnak a koordinátái, ahol a részecske az I-es tartományból átmegy a II-esbe, legyenek* (x_1, w). *Fontos, hogy x_1 értéke rögzített, és a hatás csak a w koordináta függvénye. Adjuk meg az $A(w)$ hatásfüggvény alakját! Az LHE alapján keressünk kapcsolatot a v_1/v_2 hányados és a fenti koordináták között!* (*1,0 pont*)

B rész. Szélsőértékelv az optikában

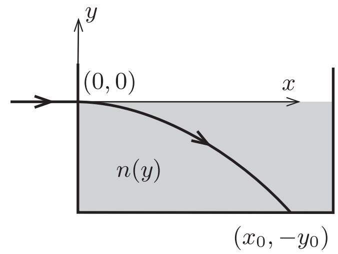
Egy fénysugár az n_1 törésmutatójú I-es közegből az n_2 törésmutatójú II-es közegbe lép át. A két közeget egy x tengellyel párhuzamos egyenes választja el. A fénysugár az y tengellyel az I-es közegben α_1, a II-es közegben α_2 szöget zár be (*2. ábra*). A fénysugár útját egy másik szélsőértékelv, a legkisebb idő elvét megfogalmazó *Fermat-elv* segítségével kapjuk meg.



2. ábra

B.1. *Az elv azt mondja ki, hogy két rögzített pont között a fénysugár olyan pályán halad, amelyen a két pont közötti út megtételéhez szükséges időnek szélsőértéke van. Vezessük le a $\sin\alpha_1$ és $\sin\alpha_2$ közötti összefüggést a Fermat-elv alapján!* (*0,5 pont*)

A *3. ábrán* (vázlatosan) egy olyan lézersugár menete látható, amely vízszintesen lép be egy cukoroldatba. Az oldatban a cukorkoncentráció – és ennek következtében a törésmutató is – csökken a magassággal.



3. ábra

B.2. *Tegyük fel, hogy a törésmutató csak y koordinátától függ, $n = n(y)$. A B.1. részben kapott összefüggés segítségével fejezzük ki a fénysugár pályájának $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ meredekségét az n_0 és $n(y)$ törésmutatók függvényében, ahol n_0 a törésmutató értéke az $y = 0$ helyen! (1,5 pont)*

B.3. *A lézersugár a $(0, 0)$ origóban vízszintesen lép be a cukoroldatba az edény aljához viszonyítva y_0 magasságban, ahogy az a 3. ábrán látszik. Legyen $n(y) = n_0 - ky$, ahol n_0 és k pozitív állandók. Fejezzük ki x-et y és a lézersugár pályáját meghatározó többi mennyiség függvényében! (1,2 pont)*

Felhasználható, hogy:

$$\int \frac{1}{\cos\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta = \ln\left(\frac{1}{\cos\vartheta} + \operatorname{tg}\vartheta\right) + \text{állandó}, \quad \text{vagy}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-1)}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + \text{állandó}.$$

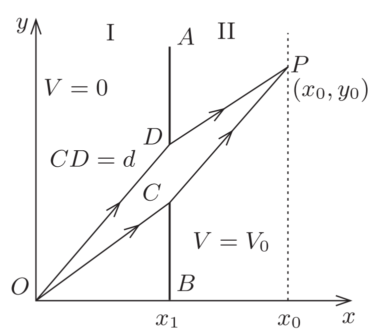
B.4. *Határozzuk meg azt az x_0 értéket, ahol a fénysugár eléri az edény alját! Legyen:* $y_0 = 10{,}0$ cm; $n_0 = 1{,}50$; $k = 0{,}050\ \mathrm{cm}^{-1}$. *(0,8 pont)*

C rész. A szélsőértékelv és az anyag hullámtermészete

Most a legkisebb hatás elve (LHE) és a mozgó részecske hullámtermészetének kapcsolatát fogjuk tanulmányozni. Ehhez azt feltételezzük, hogy az O-ból P-be haladó részecske minden lehetséges pályát befut, és mi azt a pályát keressük meg, amelyen az interferáló de Broglie-hullámok erősítik egymást.

C.1. *A részecske egy infinitezimális kicsi Δs távolsággal elmozdul a pályáján. Fejezzük ki a de Broglie-hullám $\Delta\varphi$ fázisváltozását a hatás ΔA megváltozásával és a Planck-állandóval! (0,6 pont)*

C.2. *Tekintsük újra az A részben szereplő feladatot, ahol a részecske O-ból P-be mozog* (4. ábra). *Tegyünk egy átlátszatlan lemezt a két tartomány közti AB határvonalra. Ezen egy kicsiny, d szélességű CD nyílás van, melyre teljesül, hogy $d \ll (x_0 - x_1)$ és $d \ll x_1$.*

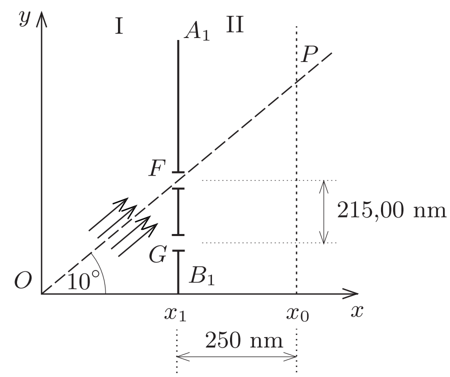


4. ábra

Vegyük fel az OCP és ODP szélső pályákat, úgy, hogy OCP az A részben tárgyalt klasszikus pályán legyen. Határozzuk meg első rendben a két pálya közötti $\Delta\varphi_{CD}$ fáziskülönbséget! (1,2 pont)

D rész. Anyaghullámok interferenciája

Tekintsünk egy elektronágyút O-ban, amely egy párhuzamosított elektronnyalábot bocsát ki a keskeny F rés irányába. A rés az $x = x_1$ helyen lévő A_1B_1 átlátszatlan elválasztófalon úgy helyezkedik el, hogy az ernyőn lévő P pont, valamint O és F egy egyenesen legyen (*5. ábra*). A sebesség az I-es tartományban $v_1 = 2{,}0000 \cdot 10^7$ m/s, és $\vartheta = 10{,}0000°$. A II-es tartományban olyan a potenciál, hogy a sebesség $v_2 = 1{,}0000 \cdot 10^7$ m/s. Az $x_0 - x_1$ távolság 250,00 mm. (Az elektronok közötti kölcsönhatást hanyagoljuk el.)



5. ábra

D.1. *Számítsuk ki az elektronágyú U_1 gyorsítófeszültségét, ha O-ban az elektronokat nyugalmi helyzetből gyorsítjuk fel! (0,3 pont)*

D.2. *Az A_1B_1 elválasztófalon az F rés alatt, attól 215,00 nm távolságra egy másik (G jelű) keskeny rést is létrehozunk. Az F és G réseken át a P pontba érkező de Broglie-hullámok fáziskülönbsége $2\pi\beta$. Számítsuk ki β értékét! (0,8 pont)*

D.3. *Mekkora az a P-től mért legkisebb Δy távolság, ahol nem várható elektron becsapódása az ernyőn? (1,2 pont)*

Figyelem! Hasznos lehet a $\sin(\vartheta + \Delta\vartheta) \approx \sin\vartheta + \Delta\vartheta\cos\vartheta$ közelítés.

D.4. *A sugár négyzetes keresztmetszete* 500 nm × 500 nm, *és a mérési összeállítás hossza* 2 m. *Mekkora az a minimális $I_{\min}$ fluxussűrűség (elektron darabszám/egységnyi merőleges felület/egységnyi idő), amely esetében egy adott időpillanatban átlagosan legalább 1 elektron található a mérési összeállításban? (0,4 pont)*