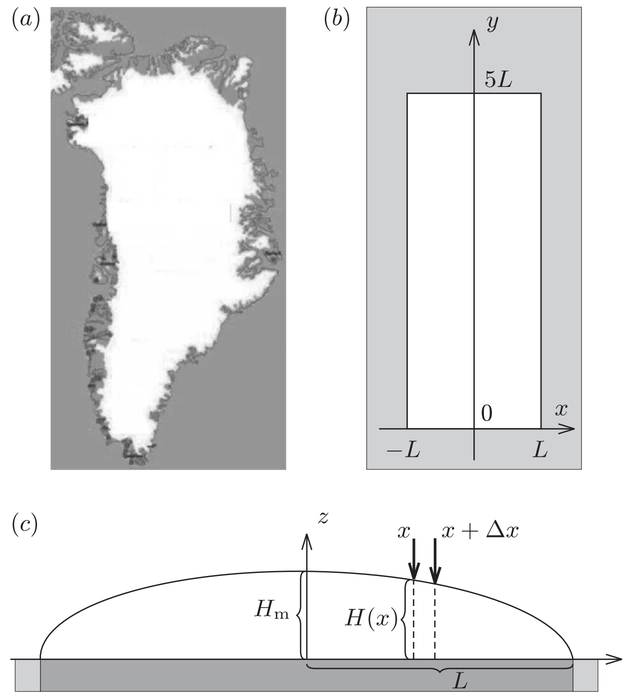
3. feladat. A grönlandi jégsapka

Bevezetés. Ez a feladat a grönlandi jégsapkáról, a világ második legnagyobb összefüggő jégtakarójáról szól, ami a *4(a). ábrán* látható. Egyszerűsített modellünkben Grönlandot egy $2L$ szélességű és $5L$ hosszúságú téglalapnak tekintjük, ahol a földfelszín a tengerszinttel azonos magasságban van, és a területét teljes mértékben összenyomhatatlan jég borítja (*4(b). ábra*). A jég $\varrho_{\text{jég}}$ sűrűségét tekintsük állandónak! A jégsapka $H(x)$ magassága nem függ az y koordinátától, és a magasság nulláról a maximális H_m értékig nő, ahogy a parttól, ($x = \pm L$) a téglalap észak-déli felezővonaláig (az y tengelyig, a „jégválasztóig") haladunk. Ez a magasságprofil a *4(c). ábrán* látható.



4. ábra. (*a*) Grönland térképe, amely a jégsapka kiterjedését és a jégmentes parti területeket mutatja. (*b*) A grönlandi jégsapka durva modellje; egy jéggel borított, $2L$ és $5L$ oldalú, az (x, y) síkban fekvő téglalap. A jégválasztó vonal, azaz a jégsapka maximális, H_m magasságú gerince az y tengely felett fekszik. (*c*) A jégsapka (x, z) síkú (függőleges) síkmetszete, melyen a jégtakaró $H(x)$ magasságprofilja látható. A $H(x)$ magasság független az y koordinátától a teljes $0 < y < 5L$ tartományban, és hirtelen nulla értékre esik $y = 0$-ban és $y = 5L$-ben. Az y tengely jelöli a jégválasztó vonal helyét. Az érthetőség kedvéért az ábra függőleges irányú léptéke nagyobb a vízszintes léptéknél. A jég sűrűsége konstans, $\varrho_{\text{jég}}$

Két hasznos összefüggés. Ebben a részben felhasználhatod a következő integrált:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3},$$

és az $(1+x)^a \approx 1 + ax$ közelítést, amely $|ax| \ll 1$ esetén érvényes.

A jégsapka magasságprofilja. Rövid időskálán a jégsapka egy összenyomhatatlan hidrosztatikai rendszer, melyben a $H(x)$ magasságprofil időben állandó.

3.1. *Add meg a jégtakaró belsejében a $p(x, z)$ nyomást, mint a földfelszíntől (tengerszinttől) mért z magasság és a jégválasztó vonaltól mért x távolság függvényét! Hanyagold el a légköri nyomást!* (0,3 pont)

Most tekints egy rögzített, egyensúlyban levő függőleges jégréteget, amely a kisméretű, vízszintes $\Delta x\,\Delta y$ alaplap fölött helyezkedik el, x és $x + \Delta x$ között, ahogy ezt a szaggatott vonalak mutatják a *4(c). ábrán*! A Δy mérete nem számít. A jégréteg befelé és kifelé eső oldalának magasságkülönbsége miatt e két függőleges oldalon ható eredő erők vízszintes komponensei különböznek. Ezt a ΔF különbséget a vízszintes alaplapon ható $\Delta F = S_b \Delta x\,\Delta y$ súrlódási erő kompenzálja, amelyet a földfelszín fejt ki a $\Delta x\,\Delta y$ területű alapra, ahol $S_b = 100$ kPa.

3.2a. *Igazold, hogy rögzített x esetén, ha $\Delta x \to 0$, akkor $S_b = kH\,\mathrm{d}H/\mathrm{d}x$, és add meg k-t!* (0,9 pont)

3.2b. *Vezesd le a magasságprofilt megadó $H(x)$ kifejezést a $\varrho_{\text{jég}}$, g, L, S_b, valamint a jégválasztótól mért x távolság függvényében! Az eredményből látható, hogy a jégsapka H_m legnagyobb magassága a $H_\mathrm{m} \propto L^{1/2}$ egyenlet szerint skálázódik az L félszélességgel.* (0,8 pont)

3.2c. *Határozd meg azt a γ kitevőt, ami szerint a jégsapka teljes $V_{\text{jég}}$ térfogata skálázódik a téglalap alakú sziget A területével, $V_{\text{jég}} \propto A^\gamma$!* (0,5 pont)

A jégsapka dinamikája. Hosszabb időskálán a jég egy viszkózus, összenyomhatatlan folyadék, amely a gravitáció hatására a középső résztől a tengerparti rész felé áramlik. Ebben a modellben a $H(x)$ jégprofil stacionárius alakja dinamikusan valósul meg; a középső területeken hóesés hatására növekvő jégmennyiséget a part mentén bekövetkező hóolvadás kompenzálja. A jégsapka alakjával kapcsolatban továbbra is használjuk a 4(b). és 4(c). ábrán szereplő egyszerűsítéseket, és még alkalmazzuk a következő feltevéseket is modellünkben:

1) A jég az (x, z) síkban áramlik, és a jégválasztó vonaltól (az y tengelytől) távolodik.
2) Középen a hóesések miatti jégképződés c sebessége (méter/év) állandó.
3) A jég csak a partmenti $x = \pm L$ területeken, olvadás útján hagyja el a szigetet.
4) A jég áramlási sebességének $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ vízszintes (x irányú) komponense a z magasságtól független.
5) A jég áramlási sebességének $v_z = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ függőleges (z irányú) komponense x-től független.

Vizsgáld csak azt a $|x| \ll L$ középső tartományt a jégsapka tetején, ahol a jégtakaró vastagsága alig változik, közel állandónak tekinthető, azaz $H(x) \approx H_\mathrm{m}$.

3.3. *A tömegmegmaradást használva határozd meg a jég áramlásának v_x vízszintes sebességkomponensét a c, x és H_m mennyiségek függvényében!* (0,6 pont)

A jég összenyomhatatlanságának feltevéséből, (tehát abból, hogy a jég $\varrho_\text{jég}$ sűrűsége állandó), és a tömegmegmaradásból az alábbi összefüggés következik a jég áramlási sebességének komponenseire:

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}z} = 0.$$

3.4. *Add meg, hogyan függ a jégfolyam sebességének v_z függőleges komponense a z magasságtól!* (0,6 pont)

Egy kis jégdarab, amely kezdetben a jégfelszín (x_i, H_m) pontjában található, az idő múlásával a jégáram részeként egy $z(x)$ pályán (trajektórián) mozog a függőleges (x, z) síkban.

3.5. *Vezesd le ennek a pályának a $z(x)$ egyenletét!* (0,9 pont)

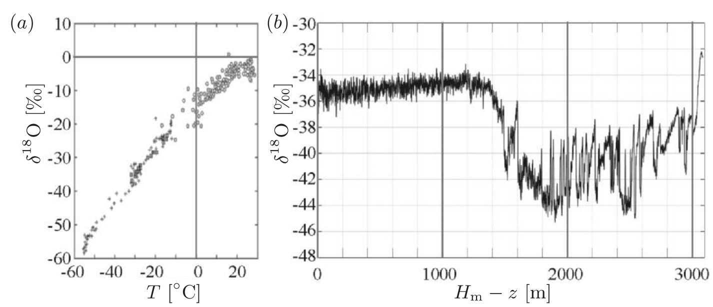
Kor- és éghajlat-indikátorok a mozgó jégsapkában. A jégfolyam $v_x(x)$ és $v_z(z)$ sebességkomponensei alapján megbecsülhető egy adott $H_\mathrm{m} - z$ mélységben található jégdarab $\tau(z)$ kora.

3.6. *Vezesd le a közvetlenül a jégválasztónál ($x = 0$) az alapkőzettől mért z magasságban található jégdarab $\tau(z)$ korát!* (1,0 pont)

Grönland jégtáblájának mélyére fúrva az egymásra fagyott múltbéli hórétegeken áthatoló jégmagok (hosszú, henger alakú jégtömbök) emelhetők ki. Az ilyen jégmagok analizálásával feltárhatók a múltbeli éghajlatváltozások, melyek egyik legjobb indikátora a $\delta^{18}\mathrm{O}$ mennyiség, amit a

$$\delta^{18}\mathrm{O} = \frac{R_\text{jég} - R_\text{ref}}{R_\text{ref}} 1000\ ‰$$

kifejezés definiál, ahol $R = \left[{}^{18}\mathrm{O}\right] / \left[{}^{16}\mathrm{O}\right]$ jelöli az oxigén két stabil izotópjának, az ${}^{18}\mathrm{O}$-nak és az ${}^{16}\mathrm{O}$-nak a relatív gyakoriságát. Az R_ref referenciaérték az Egyenlítő környéki óceáni vizekben található izotóp-összetételen alapszik.



5. ábra. (a) A hóban mérhető $\delta^{18}\mathrm{O}$ érték és az adott évi átlagos felszíni T hőmérséklet megfigyelt kapcsolata. (b) A $\delta^{18}\mathrm{O}$ érték a jég felszínétől mért $H_\mathrm{m} - z$ mélység függvényében egy, a jégválasztónál ($H_\mathrm{m} = 3060$ m), a felszíntől az alapkőzetig érő jégmag esetén

A grönlandi megfigyelések szerint a hórétegekben a $\delta^{18}\mathrm{O}$ érték jó közelítéssel lineárisan változik a hőmérséklettel (lásd az *5(a). ábrát*). Feltéve, hogy ez az összefüggés mindig igaz volt, egy jégmagból $H_\mathrm{m} - z$ mélységben nyert $\delta^{18}\mathrm{O}$ érték jó becslést szolgáltathat a Grönland környékén ezelőtt $\tau(z)$ idővel uralkodó T hőmérséklet értékére.

Egy 3060 m hosszú grönlandi jégmagon végzett $\delta^{18}\mathrm{O}$ mérések kimutatták, hogy 1492 m mélységben a $\delta^{18}\mathrm{O}$ érték hirtelen ugrik (*5(b). ábra*), jelezve az utolsó jégkorszak végét. A jégkorszak 120 000 éve kezdődött (ez az időpont 3040 m-es mélységnek felel meg), a jelenlegi jégkorszak-közti időszak pedig 11 700 éve kezdődött (ami 1492 m mélységnek feleltethető meg). Tegyük fel, hogy ez a két időszak különböző jégképződési sebességgel írható le: c_jk (a jégkorszakban) és c_ig (a jégkorszak-közti, ún. interglaciális időszakban). Feltehetjük azt is, hogy H_m értéke állandó volt az utóbbi 120 000 évben.

3.7a. *Határozd meg a c_jk és c_ig jégképződési sebességeket!* (0,8 pont)

3.7b. *Az* 5. ábra *adatait felhasználva határozd meg a jégkorszakból a jégkorszak utáni időszakba történő átmenetkor bekövetkezett hőmérsékletváltozást!* (0,2 pont)

Tengerszint-emelkedés a grönlandi jégsapka olvadása miatt. A grönlandi jégtakaró teljes elolvadása az óceánok vízszintjének globális emelkedéséhez vezetne. E szintemelkedés durva becsléseként egyszerűen feltehetjük, hogy a Föld óceánjainak teljes felületén, $A_{\text{óceán}} = 3{,}61 \cdot 10^{14}$ m^2-en, mindenhol ugyanannyival emelkedik meg a vízszint.

3.8. *Számítsd ki a grönlandi jégtakaró teljes elolvadása esetén bekövetkező átlagos vízszintemelkedést, ha annak jelenlegi területe $A_\mathrm{G} = 1{,}71 \cdot 10^{12}$ m^2 és $S_b = 100$ kPa!* (0,6 pont)

A nagy tömegű grönlandi jégsapka gravitációsan vonzóerőt fejt ki a környező óceánra. Ha a jégtakaró elolvad, ez a lokális dagály megszűnik és Grönland közelében a tengerszint lesüllyed. Ez az effektus részben ellensúlyozza az előbb kiszámolt szintemelkedést.

A gravitációs vonzás vízszintre gyakorolt hatása nagyságának megbecsléséhez modellezzük a grönlandi jégtakarót egy földfelszínen elhelyezkedő, a teljes grönlandi jégtakaróval megegyező tömegű pontszerű testtel! Koppenhága a Föld felszíne mentén mérve 3500 km-re fekszik ettől a pontszerű testtől. Feltehető, hogy a Föld a pontszerű test nélkül gömbszimmetrikus és egész felszínét, $A_{\text{Föld}} = 5{,}10 \cdot 10^{14}$ m^2-t óceán borítja. A Föld forgásából származó minden effektus elhanyagolható.

3.9. *A modell keretein belül határozd meg a $h_\mathrm{CPH} - h_\mathrm{OPP}$ különbséget, azaz a tengerszintek különbségét Koppenhága (h_CPH) és a Grönlanddal a földátmérő mentén átellenben (azaz a Grönlandtól legtávolabb) lévő földrajzi pont (h_OPP) között!* (1,8 pont)

Fizikai állandók táblázata

Fénysebesség vákuumban	$c = 2{,}998 \cdot 10^8$ m s^{-1}
Planck-állandó/(2π)	$\hbar = 1{,}055 \cdot 10^{-34}$ J s
Gravitációs állandó	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}
Nehézségi gyorsulás	$g = 9{,}82$ m s^{-2}
Elemi töltés	$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C
Vákuum permittivitás	$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ C^2 J^{-1} m^{-1}
Elektron tömege	$m_\mathrm{e} = 9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg
Avogadro-szám	$N_\mathrm{A} = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}
Boltzmann-állandó	$k_\mathrm{B} = 1{,}381 \cdot 10^{-23}$ J K^{-1}
Meteoritkő fajhője	$c_{\text{kő}} = 1{,}2 \cdot 10^3$ J kg^{-1}K^{-1}
Meteoritkő hővezetési tényezője	$k_{\text{kő}} = 2{,}0$ W m^{-1} K^{-1}
Meteoritkő sűrűsége	$\varrho_{\text{kő}} = 3{,}3 \cdot 10^3$ kg m^{-3}
Meteoritkő olvadáspontja	$T_{\text{kő}} = 1{,}7 \cdot 10^3$ K
Meteoritkő olvadáshője	$L_{\text{kő}} = 2{,}6 \cdot 10^5$ J kg^{-1}
Ezüst moláris tömege	$M_\mathrm{Ag} = 1{,}079 \cdot 10^{-1}$ kg mol^{-1}
Ezüst sűrűsége	$\varrho_\mathrm{Ag} = 1{,}049 \cdot 10^4$ kg m^{-3}
Ezüst fajhője	$c_\mathrm{Ag} = 2{,}40 \cdot 10^2$ J kg^{-1} K^{-1}
Víz moláris tömege	$M_{\text{víz}} = 1{,}801 \cdot 10^{-2}$ kg mol^{-1}
Víz sűrűsége	$\varrho_{\text{víz}} = 0{,}998 \cdot 10^3$ kg m^{-3}
Víz hőkapacitása	$c_{\text{víz}} = 4{,}181 \cdot 10^3$ J kg^{-1} K^{-1}
Víz forráshője	$L_{\text{víz}} = 2{,}260 \cdot 10^6$ J kg^{-1}
Víz forráspontja	$T_{100} = 100$ °C $= 373{,}15$ K
Jég, gleccser sűrűsége	$\varrho_{\text{jég}} = 0{,}917 \cdot 10^3$ kg m^{-3}
Gőz fajhője	$c_{\text{gőz}} = 2{,}080 \cdot 10^3$ J kg^{-1} K^{-1}
Föld tömege	$m_\mathrm{F} = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg
Föld sugara	$R_\mathrm{F} = 6{,}38 \cdot 10^6$ m
Nap tömege	$m_\mathrm{N} = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg
Nap sugara	$R_\mathrm{N} = 6{,}96 \cdot 10^8$ m
Átlagos Nap–Föld távolság	$a_\mathrm{N-F} = 1{,}50 \cdot 10^{11}$ m