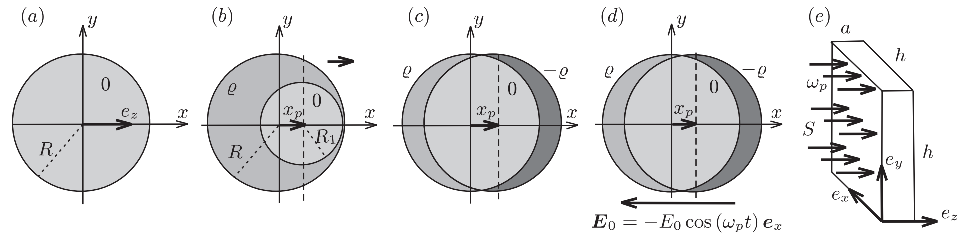
2. feladat. Plazmonos gőzfejlesztő készülék

Bevezetés. Ebben a feladatban egy hatékony, kísérletileg is működő gőzfejlesztési eljárást fogunk tanulmányozni. Víz és benne eloszlatott, nanométeres méretű, gömb alakú ezüstgolyócskák (literenként csak körülbelül 10^{13} darab) keverékét fókuszált fénynyalábbal világítjuk meg. A fény egy részét a nanogolyócskák elnyelik, így felmelegednek és közvetlen környezetükben gőzt keltenek anélkül, hogy a teljes vízmennyiséget felmelegítenék. A keletkező gőz buborékok formájában távozik a rendszerből. Jelenleg a folyamat még nem minden részletében tisztázott, de a felmelegedés jelensége a fémes nanogolyócskák elektronjainak együttes oszcillációján alapuló fényelnyeléssel magyarázható. A berendezést plazmonos gőzfejlesztőnek nevezzük.



3. ábra. (a) Egy R sugarú, gömb alakú, semleges nanogolyócska a koordináta-rendszer origójában. (b) A Tömör gömb homogén, pozitív ϱ töltéssűrűséggel (közepesen szürke), benne egy kisebb R_1 sugarú, $\boldsymbol{x}_d = x_d \boldsymbol{e}_x$ vektorral eltolt középpontú, gömb alakú, töltéssemleges tartománnyal (0, halványszürke). (c) A koordináta-rendszer origójában rögzített nanogolyócska pozitív ϱ töltéssűrűségű ezüstionjai (közepesen szürke), és az origóhoz képest $\boldsymbol{x}_p$ vektorral eltolt középpontú ($x_p \ll R$), gömb alakú, negatív $-\varrho$ töltéssűrűségű elektronfelhő (sötétszürke). (d) Külső homogén $\boldsymbol{E}_0 = -E_0 \boldsymbol{e}_x$ elektromos tér. Időfüggő $\boldsymbol{E}_0$ esetén az elektronfelhő $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}_P/\mathrm{d}t$ sebességgel mozog. (e) A z irányba haladó, ω_P körfrekvenciájú, S intenzitású, monokromatikus fénynyalábbal megvilágított téglatest alakú ($h \times h \times a$) tartály, benne a vízben eloszlatott nanogolyócskákkal

Egyetlen, gömb alakú, ezüst nanogolyócska. Ebben a részfeladatban tekintsünk egy $R = 10{,}0$ nm sugarú, gömb alakú ezüst nanogolyócskát, melynek középpontja a koordináta-rendszerünk origójában van rögzítve, ahogy az a *3*(a). *ábrán* látható. Minden bekövetkező mozgás, erőhatás és erőtér párhuzamos a vízszintes x tengellyel (amely az $\boldsymbol{e}_x$ irányvektorral adható meg). A nanogolyócska vezetési elektronjai a golyócska teljes térfogatában szabadon mozoghatnak anélkül, hogy bármelyik ezüstatomhoz kötődnének. Az ezüstatomok pozitív ionokként vannak jelen a golyócskában, mindegyik egy-egy elektronnal járul hozzá a szabad töltéshordozókhoz.

2.1. *Határozd meg a következő mennyiségeket: a nanogolyócska V térfogata és M tömege; a nanogolyócskában található ezüstionok N száma és ϱ töltéssűrűsége; valamint a szabad elektronok n számsűrűsége (koncentrációja), összes Q töltése és összes m_0 tömege.* (0,7 pont)

Elektromos mező egy töltött gömbön belüli töltéssemleges tartományban. Ebben a részfeladatban tegyük fel, hogy minden anyag relatív permittivitása $\varepsilon = 1$. Homogén ϱ töltéssűrűségű, R sugarú gömb belsejében $-\varrho$ töltéssűrűség hozzáadásával egy kisebb, R_1 sugarú, töltéssemleges tartományt hozunk létre, melynek középpontja az R sugarú gömb középpontjához képest $\boldsymbol{x}_d = x_d\, \boldsymbol{e}_x$ vektorral el van tolva (lásd a *3*(b). *ábrát*).

2.2. *Mutasd meg, hogy a töltéssemleges tartományban az elektromos tér homogén és $\mathbf{E} = A(\varrho/\varepsilon_0)\,\mathbf{x}_d$ alakú! Határozd meg az A szorzótényező értékét!* (1,2 pont)

A kitérített elektronfelhőre ható visszatérítő erő. A következőkben a szabad elektronok együttes mozgását vizsgáljuk. Ennek érdekében modellezzük a szabad elektronok összességét egyetlen, negatívan töltött, homogén $-\varrho$ töltéssűrűségű, $\boldsymbol{x}_p$ középpontú gömbbel, amely az x tengely mentén mozoghat az origóhoz rögzített középpontú, pozitív töltésű gömbhöz (ezüstionok) képest (lásd a *3*(c). *ábrát!*). Tegyük fel, hogy egy külső $\boldsymbol{F}_{\text{külső}}$ erő hatására az elektronfelhő $\boldsymbol{x}_p = x_p\, \boldsymbol{e}_x$ vektorral elmozdul eredeti helyzetéből, ahol $x_p \ll R$. A nanogolyócska – a két szélén megjelenő kicsiny töltéstől eltekintve – a belsejében töltéssemleges marad.

2.3. $\mathbf{x}_p$ *és n felhasználásával fejezd ki a következő két mennyiséget: az elektronfelhőre ható* $\mathbf{F}$ *visszatérítő erőt, valamint az elektronfelhő elmozdítása során végzett W_{el} munkát.* (1,2 pont)

Ezüst nanogolyócska időben állandó, külső elektromos térben. Egy nanogolyócskát vákuumban $\boldsymbol{E}_0 = -E_0\, \boldsymbol{e}_x$ homogén elektromos térbe helyezünk, melynek hatására az elektronfelhő $\boldsymbol{F}_{\text{külső}}$ erőhatást érezve kicsiny x_p távolsággal elmozdul, ahol $|x_p| \ll R$.

2.4. *Határozd meg az elektronfelhő x_p elmozdulását E_0 és n felhasználásával! Határozd meg az elmozdulás közben a nanogolyócska közepén átmenő (y, z) síkon keresztülhaladó $-\Delta Q$ töltést R, n és x_p függvényében!* (0,6 pont)

Az ezüst nanogolyócska helyettesítő kapacitása és induktivitása. Mind időben állandó, mind változó $\boldsymbol{E}_0$ elektromos térben a nanogolyócska modellezhető egy megfelelő elektromos áramkörrel. A helyettesítő képbeli kapacitás meghatározható, ha a ΔQ töltés szétválasztásához szükséges W_{el} munkát megfeleltetjük egy $\pm\Delta Q$ töltéssel ellátott kondenzátor energiájának. A töltésszétválasztás a helyettesítő képben V_0 feszültséget eredményez a fegyverzetek között.

2.5a. *Fejezd ki a rendszer helyettesítő képének C kapacitását ε_0 és R felhasználásával, és számítsd ki numerikus értékét!* (0,7 pont)

2.5b. *E_0 és R felhasználásával fejezd ki azt a V_0 feszültséget, amit a helyettesítő képbeli kondenzátorra kellene kapcsolni ahhoz, hogy ΔQ töltése legyen!* (0,4 pont)

Időfüggő $\boldsymbol{E}_0$ elektromos tér esetén az elektronfelhő mozgásba jön, sebességét jelölje $\boldsymbol{v} = v \cdot \boldsymbol{e}_x$ (lásd a *3(d). ábrát!*). Ennek következtében az elektronok W_{kin} mozgási energiára tesznek szert és a rögzített yz-síkon átfolyó I erősségű áramot okoznak. Az elektronfelhő mozgási energiája megfeleltethető egy I árammal átjárt L induktivitás energiájának.

2.6a. *Fejezd ki a W_{kin} és I mennyiségeket v felhasználásával!* (0,7 pont)

2.6b. *Fejezd ki a helyettesítő képbeli L induktivitást a golyócska R sugarának, az elektron e töltésének és m_e tömegének, valamint az n elektronszám-sűrűség felhasználásával, majd számítsd ki numerikus értékét!* (0,5 pont)

Az ezüst nanogolyócska plazmon rezonanciája. Az eddigiekből következik, hogy az egyensúlyi helyzetéből kitérített, majd elengedett elektronfelhő mozgása egy, a rezonanciafrekvenciával oszcilláló ideális LC-körrel modellezhető. Az elektronfelhő ilyen mozgását plazmon-rezonanciának hívják, a rezgés ω_p körfrekvenciája pedig az úgynevezett plazmon-körfrekvencia.

2.7a. *Határozd meg az elektronfelhő ω_p plazmon-körfrekvenciáját az elektron e töltésének, m_e tömegének, az n elektronszám-sűrűség és az ε_0 vákuum-permittivitás felhasználásával!* (0,5 pont)

2.7b. *Számítsd ki ω_p-t rad/s egységekben, valamint az $\omega = \omega_p$ körfrekvenciájú fény λ_p hullámhosszát* nm *egységekben!* (0,4 pont)

Plazmon frekvenciájú fénnyel megvilágított ezüst nanogolyócska. A feladat további részében a nanogolyócskát ω_p plazmon körfrekvenciájú, $S = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 = 1{,}00\ \mathrm{MWm^{-2}}$ intenzitású, monokromatikus fénnyel világítjuk meg. Mivel a hullámhossz nagy ($\lambda_p \gg R$), tekinthetjük úgy, hogy a nanogolyócska homogén, időben harmonikusan változó $\boldsymbol{E}_0 = -E_0 \cos(\omega_p t)\, \boldsymbol{e}_x$ elektromos térben helyezkedik el. Az $\boldsymbol{E}_0$ tér hatására az elektronfelhő $\boldsymbol{x}_p$ középpontja is ugyanazon frekvenciával, $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}_P/\mathrm{d}t$ sebességgel, állandó x_0 amplitúdóval rezegni kezd. Az elektronok eme rezgőmozgása a fény elnyeléséhez vezet. A nanogolyócska által befogott energia egy része a golyócska belsejében Joule-hővé alakul, a maradék része pedig szórt fény formájában újra kisugárzódik.

A Joule-hőt a szabad elektronoknak az ezüstionokkal való ritka, véletlenszerű, rugalmatlan ütközései okozzák. Az ütköző elektron a teljes mozgási energiáját elveszíti, ami az ezüstionok rezgéseivé (azaz hővé) alakul. Az ilyen ütközések közötti átlagos időtartam $\tau \gg 1/\omega_p$, ahol ezüst nanogolyóskára számoljunk a $\tau = 5{,}24 \cdot 10^{-15}$ s értékkel!

2.8a. *Fejezd ki a nanogolyócskában fejlődő Joule-hő keletkezési ütemének (teljesítményének) $P_{\mathrm{hő}}$ időátlagolt értékét és az áramerősség négyetének $\langle I^2 \rangle$ időátlagát úgy, hogy a kifejezések expliciten tartalmazzák az elektronfelhő sebességnégyzetének $\langle v^2 \rangle$ időátlagát!* (1,0 pont)

2.8b. *Határozd meg a nanogolyócska helyettesítő képének ohmikus ellenállását, amely kapcsolatot teremt a fejlődő Joule-hő teljesítménye és az elektronfelhő I áramerőssége között. Számítsd ki numerikus értékét!* (1,0 pont)

A beeső fénynyalábban a rezgő elektronfelhőn való szóródás (újrakibocsátás) következtében valamekkora $P_{\mathrm{szórt}}$ időátlagolt teljesítmény formájában veszteség lép fel. $P_{\mathrm{szórt}}$ nagysága függ a szórócentrum x_0 amplitúdójától, Q töltésétől, ω_p körfrekvenciájától, valamint a fény tulajdonságaitól (a c fénysebességtől és a vákuum ε_0 permittivitásától). E négy változóval kifejezve $P_{\mathrm{szórt}}$ a következő formulával adható meg:

$$P_{\mathrm{szórt}} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_p^4}{12\,\pi\varepsilon_0\, c^3}.$$

2.9. *$P_{\mathrm{hő}}$ analógiájára határozd meg a fényszórásnak megfelelő ekvivalens $P_{\mathrm{szórt}}$ ohmikus ellenállást $P_{\mathrm{szórt}}$ felhasználásával! Számítsd ki numerikus értékét is!*

(1,0 pont)

Az előbbiekben tárgyalt helyettesítő áramköri elemeket sorosan RLC-körbe kapcsolva, majd az áramkört (a beeső fény E_0 térerőssége által meghatározott amplitúdójú) $V = V_0 \cos(\omega_p t)$ váltakozó feszültségre kapcsolva megkapjuk az oszcilláló térbe helyezett ezüst nanogolyócska modelljét.

2.10a. *Ismert adatok felhasználásával határozd meg a $P_{\mathrm{hő}}$ és $P_{\mathrm{szórt}}$ időátlagolt teljesítmény- veszteségek kifejezéseit, valamint az $\omega = \omega_p$ körfrekvenciájú beeső fény E_0 amplitúdóját!* (1,2 pont)

2.10b. *Határozd meg E_0, $P_{\mathrm{hő}}$, és $P_{\mathrm{szórt}}$ numerikus értékét!* (0,3 pont)

Gőzfejlesztés fénnyel. Az ezüst nanogolyócskákat $n_{\mathrm{ng}} = 7{,}3 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m^{-3}}$ koncentrációban elkeverjük vízben, majd a keveréket egy téglatest alakú, $h \times h \times a = 10 \times 10 \times 10\ \mathrm{cm^3}$ méretű, átlátszó tartályba töltjük, végül a rendszert merőleges beeséssel plazmon frekvenciájú, $S = 1{,}00\ \mathrm{MW\,m^{-2}}$ intenzitású fénnyel világítjuk meg (lásd a *3(e). ábrát!*). A víz hőmérséklete $T_{\mathrm{hő}} = 20\ °\mathrm{C}$, és a megfigyelésekkel összhangban feltehetjük, hogy stacionárius állapotban a nanogolyócskák Joule-hője teljes egészében $T_{\mathrm{gőz}} = 110\ °\mathrm{C}$ hőmérsékletű gőz keletkezésére fordítódik, a teljes víztömeg hőmérsékletének növelése nélkül.

A plazmonos gőzfejlesztő készülék termodinamikai hatásfokát az $\eta = P_{\mathrm{gőz}}/P_{\mathrm{összes}}$ hányadosként definiáljuk, ahol $P_{\mathrm{gőz}}$ az egész tartályban a gőz fejlesztésére fordítódó hőteljesítmény, $P_{\mathrm{összes}}$ pedig a tartályra eső fény összes teljesítménye.

Bármely kiszemelt nanogolyócskát az idő legnagyobb részében víz helyett gőz veszi körül, ezért tárgyalható úgy, mintha vákuumban helyezkedne el.

2.11a. *Számítsd ki numerikusan a plazmonos gőzfejlesztő készülék által az időegység alatt előállított vízgőz* $m_{\text{gőz}}$ *tömegét a plazmon frekvenciájú, S intenzitású fénnyel való besugárzás folyamán!* (0,6 pont)

2.11b. *Számítsd ki numerikusan a plazmonos gőzfejlesztő készülék* η *termodinamikai hatásfokát!* (0,2 pont)