2. feladat. Elektromosan töltött szappanbuborék

Egy gömb alakú szappanbuborék belsejében a levegő sűrűsége ϱ_i, a hőmérséklet T_i, a buborék sugara R_0, amit ϱ_a sűrűségű, P_a atmoszférikus nyomású és T_a hőmérsékletű külső levegő vesz körül. A szappanhártya felületi feszültsége γ, sűrűsége ϱ_s, vastagsága pedig t. A szappanhártya tömege és felületi feszültsége nem változik a hőmérséklet változásával. Feltehetjük, hogy $R_0 \gg t$.

Jól ismert, hogy a dE energia, ami a szappanhártya-levegő egy oldali határfelületét dA területtel megnöveli, így adható meg: $dE = \gamma dA$, ahol γ a hártya felületi feszültsége.

2.1. Fejezd ki a $\dfrac{\varrho_i T_i}{\varrho_a T_a}$ arányt a következő változókkal: γ, P_a és R_0.

2.2.

Add meg a $\dfrac{\varrho_i T_i}{\varrho_a T_a} - 1$ kifejezés számszerű értékét a következő adatok felhasználásával: $\gamma = 0{,}0250\ \mathrm{Nm}^{-1}$, $R_0 = 1{,}00$ cm, illetve $P_a = 1{,}013 \cdot 10^5\ \mathrm{Nm}^{-2}$.

2.3. Kezdetben a buborék belsejében a levegő melegebb, mint kívül. Add meg számszerűen azt a minimális T_i belső hőmérsékletet, ami elegendő ahhoz, hogy a buborék lebegjen a nyugvó levegőben! Az előzőekben megadottakkal együtt használd fel a következő adatokat: $T_a = 300$ K, $\varrho_s = 1000\ \mathrm{kgm}^{-3}$, $\varrho_a = 1{,}30\ \mathrm{kgm}^{-3}$, $t = 100$ nm és $g = 9{,}80\ \mathrm{ms}^{-2}$.

A keletkezése után hamarosan a buborék hőmérsékleti egyensúlyba kerül a környezetével. Természetesen ekkor a buborék a talaj felé esik, ha a levegő nem mozog.

2.4. Add meg paraméteresen a felfelé áramló levegő minimális u sebességét, ami ahhoz kell, hogy megakadályozza a termikus egyensúlyban lévő buborék leesését! Válaszodat add meg ϱ_s, R_0, g, t és a levegő η viszkozitása segítségével! Feltételezheted, hogy az áramlási sebesség olyan kicsiny, hogy a Stokes-törvény alkalmazható, továbbá elhanyagolhatod a buborék sugarának változását, miközben a hőmérséklet a buborék belsejében az egyensúlyi értékre csökken. A Stokes-törvény így adja meg a közegellenállási fékező erőt: $F = 6\pi\eta R_0 u$.

2.5. Számítsd ki az u áramlási sebesség számszerű értékét, ha

$$\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-1}\mathrm{s}^{-1}.$$

Az eddigi számítások azt sugallják, hogy a γ felületi feszültség figyelembe vétele csak nagyon kis mértékben befolyásolja az eredmények pontosságát. A további alkérdések esetében hanyagold el a felületi feszültségből adódó tagokat.

2.6. Most a gömb alakú buborék legyen egyenletesen feltöltve q töltéssel. Vezess le egy olyan egyenletet, ami tartalmazza a buborék R_1 új sugarát, továbbá a következő mennyiségeket: R_0, P_a, q és a vákuum ε_0 permittivitását (más néven a vákuum dielektromos állandóját)!

2.7. Tegyük fel, hogy a buborék teljes töltése nem túlságosan nagy (azaz $\dfrac{q^2}{\varepsilon_0 R_0^4} \ll P_a$), és ezért a buborék sugarának növekedése kicsiny. Add meg közelítőleg a buborék sugarának ΔR megváltozását, ahol $R_1 = R_0 + \Delta R$! Használd a következő közelítést: $(1+x)^n \approx 1 + nx$, ha $x \ll 1$.

2.8. Fejezd ki a buborék álló levegőben való lebegéséhez szükséges q töltést a következő mennyiségek függvényében: t, ϱ_a, ϱ_s, ε_0, R_0, P_a! Számítsd ki a q töltés számszerű értékét is! A vákuum permittivitása: $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ farad/m.