3. feladat. Egyszerű atommagmodell Bevezetés. Bár az atommagok kvantummechanikai objektumok, az alaptulajdonságaikra (mint például sugarukra, kötési energiájukra) vonatkozó fenomenologikus törvények néhány egyszerű feltételezésből megkaphatók:

(i) az atommagok nukleonokból (protonokból és neutronokból) állnak;

(ii) a nukleonokat összetartó erős kölcsönhatás nagyon rövid hatótávolságú (csak szomszédos nukleonok között működik);

(iii) egy adott atommagban a protonok száma (Z) közel azonos a neutronok számával (N), azaz $Z \approx N \approx A/2$, ahol A az összes nukleon száma (tömegszám), ha $A \gg 1$.

Fontos: A következő 1–4. részfeladat mindegyikében használd ezeket a feltételezéseket! Az 5. részfeladat az előzőektől függetlenül megoldható.

1. Az atommag, mint szorosan illeszkedő nukleonok rendszere. Egy egyszerű modellben az atommag úgy tekinthető, mint egy gömb, mely egymáshoz szorosan illeszkedő nukleonokból áll (*6.(a) ábra*), ahol a nukleonok $r_N = 0{,}85$ fm sugarú merev golyók (1 fm $= 10^{-15}$ m). A nukleáris kölcsönhatás csak az egymással közvetlenül érintkező két nukleon között működik. Az atommag teljes V térfogata nagyobb, mint az őt alkotó nukleonok AV_N össztérfogata, ahol $V_N = \frac{4}{3} r_N^3 \pi$. Az $f = AV_N/V$ arányt *kitöltési tényezőjének* hívják, és azt adja meg, hogy az atommag térfogatának hányadrészét tölti ki nukleáris anyag.

a) Határozd meg az f kitöltési tényezőt, feltételezve, hogy a nukleonok egyszerű köbös (simple cubic, SC) rácsba rendeződnek. Az egyszerű köbös rácsban a nukleonok egy végtelen kockarács csúcspontjaiban találhatóak. (Lásd *6.(b) ábra.*)

6. ábra. (a) Egy atommag, mint szorosan illeszkedő nukleonokból álló gömb. (b) Az egyszerű köbös (simple cubic, SC) térkitöltés

Fontos: Minden további kérdésben tételezd fel, hogy az atommagok kitöltési tényezője megegyezik a most kiszámolt értékkel! Ha nem tudtad megoldani az előző kérdést, akkor a továbbiakban számolj az $f = 1/2$ értékkel!

b) Becsüld meg az A tömegszámú (A nukleont tartalmazó) atommag átlagos ϱ_m tömegsűrűségét, ϱ_c töltéssűrűségét valamint R sugarát! Egy nukleon átlagos tömege $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

2. Az atommag kötési energiája (térfogati és felületi tagok). Az atommag kötési energiája az őt alkotó különálló nukleonokra való szétbontásához szükséges energia. A kötési energia legjelentősebb része a szomszédos nukleonok között működő vonzó nukleáris kölcsönhatásból származik. Az atommag belsejében található nukleonokhoz rendelhető kötési energiajárulék $a_V = 15{,}8$ MeV (1 MeV $= 1{,}602 \cdot 10^{-13}$ J). Az atommag felületén levő nukleonok járuléka közelítőleg ennek a fele, $a_V/2$. Fejezd ki az A tömegszámú atommag E_b kötési energiáját A, a_V és f segítségével, figyelembe véve a felületi korrekciót is!

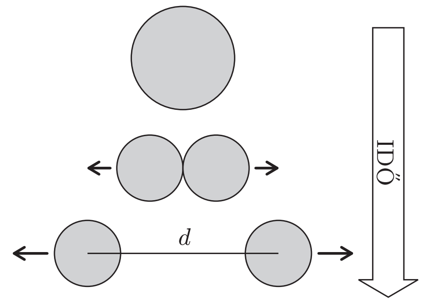
3. A kötési energia elektrosztatikus (Coulomb) tagja. Ismert, hogy az R sugarú, Q_0 elektromos töltéssel térfogatában egyenletesen feltöltött gömb elektrosztatikus energiája:

$$U_c = \frac{3Q_0^2}{20\pi\varepsilon_0 R}, \quad \text{ahol} \quad \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}.$$

a) A fenti formula felhasználásával határozd meg az atommag elektrosztatikus energiáját! Az atommagban található protonok saját magukra nem hatnak (Coulomb-erővel), csak a többi protonra. Ezt a tényt úgy vehetjük figyelembe, hogy a végső formulában a $Z^2 \to Z(Z-1)$ átírást hajtjuk végre. Ebben és a következő feladatokban használd ezt a korrekciót!

b) Add meg a kötési energia teljes képletét, mely tartalmazza a fő (térfogati) tagot, valamint a felületi- és Coulomb-korrekciót!

4. Nehéz atommagok bomlása. A bomlás olyan nukleáris folyamat, mely során egy atommag könnyebb alkotóelemekre (kisebb atommagokra) esik szét. Tegyük föl, hogy egy A tömegszámú atommag két azonos részre bomlik, a *7. ábrán* látható módon.

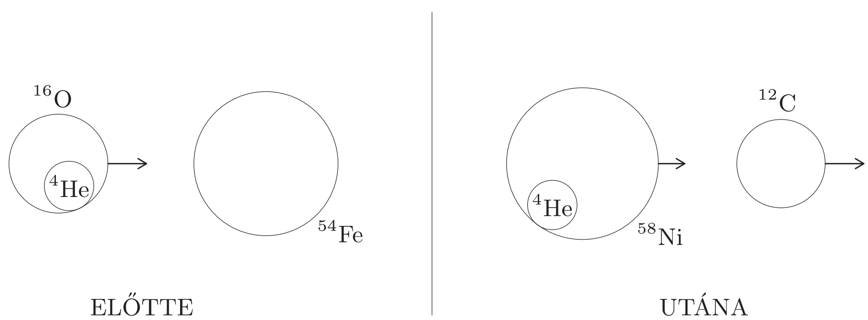


7. ábra. A nukleáris bomlás sematikus rajza a modellünk szerint

a) Határozd meg a bomlástermékek együttes mozgási energiáját (E_{kin}-t), feltételezve, hogy a két könnyebb atommag középpontjának távolsága $d \geq 2R(A/2)$, ahol $R(A/2)$ a bomlás során képződött atommagok sugara! Kezdetben a bomló atommag nyugalomban volt.

b) Feltételezve, hogy $d = 2R(A/2)$, határozd meg az előző, *a*) pontban E_{kin}-re kapott kifejezés értékét $A = 100$, 150, 200 és 250 esetén! (Eredményeidet MeV egységben add meg!) A fenti modell alapján becsüld meg, hogy mely A tömegszám esetén lehetséges bomlás!

5. Transzfer reakciók. *a*) A magfizikában az atommagok és a magreakciók energiáit tömeg egységekben szokás megadni. Például egy nem mozgó (nulla sebességű), ámde az alapállapothoz képest E_{exc} energiával gerjesztett atommag tömege $m = m_0 + E_{\mathrm{exc}}/c^2$, ahol m_0 a mag nyugalmi tömege alapállapotban. Az ${}^{16}\mathrm{O} + {}^{54}\mathrm{Fe} \to {}^{12}\mathrm{C} + {}^{58}\mathrm{Ni}$ magreakció az egyik példája az úgynevezett „transzfer reakcióknak", amikor az egyik atommag egy része („klaszter") bejut a másik atommagba (lásd a *8. ábrát*). Esetünkben az átkerülő rész egy α részecske (^{4}He-klaszter). A transzfer reakciók akkor játszódnak le maximális valószínűséggel, ha a kirepülő reakciótermék (esetünkben a ^{12}C mag) sebessége nagyság és irány szerint megegyezik a becsapódó lövedék mag (esetünkben az ^{16}O) sebességével. A ^{54}Fe céltárgy kezdetben nyugalomban van. A reakcióban a ^{58}Ni magasan gerjesztett állapotba kerül. Határozd meg ennek az állapotnak a gerjesztési energiáját (és fejezd ki MeV egységekben), ha a lövedék ^{16}O mag mozgási energiája 50 MeV. A fény sebessége $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.



8. ábra. A transzfer reakció vázlata

1.	$M({}^{16}\mathrm{O})$	15,994 91 a.m.u.
2.	$M({}^{54}\mathrm{Fe})$	53,939 62 a.m.u.
3.	$M({}^{12}\mathrm{C})$	12,000 00 a.m.u.
4.	$M({}^{58}\mathrm{Ni})$	57,935 35 a.m.u.

1. táblázat. A reakciótermékek nyugalmi tömegei alapállapotukban atomi tömegegységben (a.m.u.), ahol 1 a.m.u. $= 1{,}6605 \cdot 10^{-27}$ kg

b) Az *a*) részben tárgyalt, gerjesztett állapotú ^{58}Ni mag alapállapotba jut („legerjesztődik"), miközben kibocsát egy gamma-fotont a mozgásának irányában. Tárgyaljuk ezt a bomlást abban a vonatkoztatási rendszerben, amelyben a ^{58}Ni mag nyugalomban van, és határozzuk meg a ^{58}Ni mag visszalökődési energiáját (vagyis azt a mozgási energiát, amivel a ^{58}Ni mag rendelkezik a foton kibocsátása után). Mekkora a foton energiája ebben a vonatkoztatási rendszerben? Mekkora a foton energiája a laboratóriumi kordináta rendszerben (azaz mekkora foton energiát mérne az a detektor, amelyet a ^{58}Ni mag mozgásának irányába állítanának be)?