

1. feladat. Tükörtlöltés egy fémtárgyban

Bevezetés – Tükörtlöltés módszer. Helyezzünk el egy q ponttöltést egy R sugarú, földelt fémgömb közelében (lásd az 1.(a) ábrát). A ponttöltés hatására a gömbön felületi töltéeloszlás jön létre. A felületi töltéeloszlás által keltett elektromos tér és a potenciál kiszámítása rendkívül nehéz feladat. Azonban az úgynevezett tükörtlöltés módszerrel a számítások lényegesen leegyszerűsíthetők. A módszer lényege az, hogy a gömbön lévő töltéeloszlás által keltett elektromos mező és potenciál leírható egyetlen, a gömb belsejében lévő q' ponttöltés terével és potenciáljával (ezt a tényt nem kell bizonyítanod).

Megjegyzés: Ennek a q' tükörtlöltésnek az elektromos tere csak a gömbön kívül (beleértve a felületét is) feleltethető meg a felületi töltéeloszlás által keltett elektromos térnek és potenciálnak.



1. ábra. (a) A q ponttöltés egy földelt fémgömb közelében. (b) A gömbön létrejövő töltés terét megfeleltethetjük a q' tükörtlöltés elektromos terének

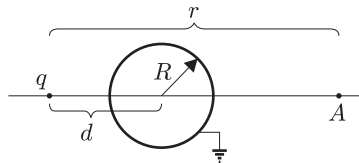
1. Tükörtlöltés. Az elrendezés szimmetriájából következik, hogy a q' ponttöltésnek a q ponttöltést és a gömb középpontját összekötő egyenesen kell lennie (lásd az 1.(b) ábrát).

a) Mekkora a potenciál értéke a gömbön?

b) Fejezd ki a tükörtlöltés q' értékét, valamint a gömb középpontjától számított d' távolságát q , d és R segítségével!

c) Határozd meg a q töltésre ható erő nagyságát! Ez az erő taszító (igen vagy nem)?

2. Elektrosztatikus tér leárnnyékolása. Tekintsünk egy q ponttöltést egy R sugarú, földelt fémgömb közelében, a gömb középpontjától d távolságra. Azt vizsgáljuk, hogyan befolyásolja a földelt fémgömb jelenléte az A pontban az elektromos teret. Az A pont a gömb túlsó oldalán helyezkedik el (lásd a 2. ábrát). Az A pont a q ponttöltést és a gömb középpontját összekötő egyenesen található; a q ponttöltéstől mért távolsága r .



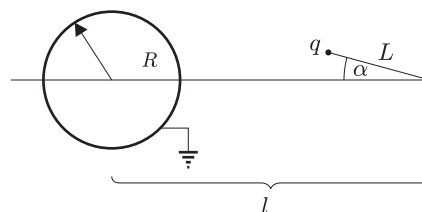
2. ábra. Az A pontban a földelt gömb részlegesen leárnnyékolja az elektromos teret

a) Határozd meg az A pontban az elektromos térerősség vektort!

b) Határozd meg az elektromos térerősség képletét nagyon nagy távolság ($r \gg d$) esetén, felhasználva, hogy $(1 + a)^{-2} \approx 1 - 2a$, ha $a \ll 1$.

c) A d távolságra nézve milyen feltételnek kell teljesülni ahhoz, hogy a földelt fémgömb teljesen leárnnyékolja a q töltés terét, vagyis az A pontban az elektromos térerősség pontosan nulla legyen?

3. Rezgések a földelt fémgömb elektromos terében. Egy L hosszúságú fonál segítségével a földelt fémgömb közelében „felfüggesztünk” egy q ponttöltést, melynek tömege m . A fonál másik végét egy falhoz rögzítjük. A fal elektrosztatikus hatásait hanyagoljuk el. A ponttöltés matematikai ingaként viselkedik (lásd a 3. ábrát). A fonálnak a falhoz rögzített vége l távolságra van a gömb középpontjától. Tegyük fel, hogy a gravitáció elhanyagolható.



3. ábra. Egy ingaként viselkedő ponttöltés a földelt fémgömb közelében

a) Adjuk meg a q ponttöltésre ható elektromos erő nagyságát egy adott α szög esetén, és jelezzük ennek az erőnek az irányát egy jól áttekinthető ábrán!

b) Határozzuk meg ennek az erőnek a fonálra merőleges összetevőjét a következő tagok függvényében: l , L , R , q és α .

c) Adjuk meg az inga kis rezgéseinek frekvenciáját!

4. A rendszer elektrosztatikus energiája. Elektromos töltéeloszlások esetén a rendszer elektrosztatikus energiája fontos adat. A mi esetünkben (lásd az 1.(a) ábrát), elektrosztatikus kölcsönhatás jön létre a külső q töltés és a gömbön kialakuló töltések között, valamint létezik elektrosztatikus kölcsönhatás magán a gömbön lévő töltések között is. A q töltés, valamint a gömb R sugara, továbbá a d távolság segítségével határozzuk meg a következő elektrosztatikus energiákat:

a) a q töltés és a gömbön lévő töltések közötti kölcsönhatás elektrosztatikus energiáját;

b) a gömbön lévő töltések közötti kölcsönhatás elektrosztatikus energiáját;

c) a rendszer teljes kölcsönhatási elektrosztatikus energiáját.

Útmutatás: Ez a feladat többféleképpen is megoldható!

(1) Az egyik módszer esetén a következő integrált használhatod:

$$\int_d^\infty \frac{x dx}{(x^2 - R^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{d^2 - R^2}.$$

(2) Egy másik módszer esetén felhasználhatod azt a tényt, hogy N ponttöltésből álló rendszer teljes elektrosztatikus energiája az összes töltéspárra vonatkozó energiák összege:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|},$$

ahol a töltéseket q_i jelöli, és ezek az \vec{r}_i , ($i = 1, \dots, N$) pontokban helyezkednek el.