Négyzet alakú, rövidre zárt lapos tekercs anyaga szupravezető (ellenállása elhanyagolható). A négyzet oldalélei l hosszúak, egy-egy oldalának tömege m. A tekercs, amelynek induktivitása L, súrlódásmentesen elfordulhat a négyzet alsó, vízszintes oldala körül.

Kezdetben a tekercs függőlegesen, labilis egyensúlyi helyzetben áll a földi nehézségi erőtérben. Ezután egy olyan homogén mágneses mezőt alkalmazunk, hogy a tekercsre ható $\mathbf{B}$ *mágneses indukció vektor nagysága állandó, iránya függőleges legyen. Ekkor a tekercsben nem folyik áram.*

Ezután a tekercs felső végét kicsiny v_0 sebességgel meglökjük. Körbefordul-e a tekercs, vagy ha nem, akkor milyen határok között fog mozogni?

Megoldás. Az alapvető összefüggés, melyből ennek a feladatnak a megoldásánál kiindulhatunk, a dinamikának az az alaptörvénye, amely merev testeknek rögzített tengely körüli forgására vonatkozik:

$$\Theta\beta = \sum M,$$

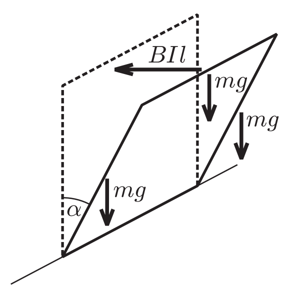
vagyis a test Θ tehetetlenségi nyomatékának és β szöggyorsulásának szorzata a testre ható erők forgatónyomatékainak összegével egyenlő.

A feladat szempontjából lényegtelen, hogy a „lapos tekercs” hány menetes, ezért a továbbiakban azt egy keretnek (1 menetes tekercsnek) tekintjük (*3. ábra*). Az ábrán felrajzoltuk azokat az erőket, amelyek akkor hatnak a keretre, amikor az már α szögben kilendült eredeti függőleges helyzetéből. Az oldalakra ható mg nehézségi erő tovább akarja forgatni a keretet, a felső oldalra ható BIl erő vízszintes irányú (a többi oldalon ható mágneses erőknek nincs forgatónyomatéka, így ezekkel nem kell törődnünk). Mivel a keretben folyó áram az elektromágneses indukció miatt lép fel, ezért – Lenz törvénye szerint – a felső oldalon ható erő visszafelé akarja forgatni a keretet. A hozzá tartozó erőkar $l\cos\alpha$ nagyságú, tehát:

$$\Theta\beta = mgl\sin\alpha + 2mg\frac{l}{2}\sin\alpha - BIl\cdot l\cos\alpha.$$

Ebben az egyenletben

$$\Theta = ml^2 + 2\cdot\frac{1}{3}ml^2 = \frac{5}{3}ml^2.$$



3. ábra

Hogyan határozhatjuk meg az I indukált áram nagyságát? A tekercsben most kétféle okból lép fel indukált feszültség. Az egyik ok, hogy vezető mozog a mágneses térben. Ennek megfelelően az indukált feszültség nagysága Neumann törvénye szerint

$$U_1 = Blv\,\cos\alpha.$$

A másik ok az, hogy az L induktivitású tekercsben változik az áram, ezért a fellépő önindukciós feszültség

$$U_2 = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

A kettő előjeles összege adja IR-et a lassan változó áramokra is igaz Kirchhoff-féle huroktörvény szerint. Mivel a tekercs anyaga most szupravezető, ezért $R=0$, tehát

$$Bl\frac{\Delta s}{\Delta t}\cos\alpha - L\frac{\Delta I}{\Delta t} = 0.$$

Ha ebből akarjuk I-t kifejezni, akkor ($\Delta s = l\Delta\alpha$ behelyettesítése után) integrálnunk kell az egyenletet. Ennek a matematikai műveletnek a megkerülésével is eljuthatunk azonban a helyes összefüggéshez, ha azt vesszük figyelembe, hogy a keret $A=l^2$ nagyságú keresztmetszetén áthaladó teljes fluxus (amely a külső mágneses tértől származó fluxus és az önindukciós fluxus összege) állandó kell maradjon:

$$BA\sin\alpha - LI = \text{állandó}.$$

Az állandó értéke $LI_0 = 0$, hiszen a kezdeti ($\alpha = 0$-hoz tartozó) I_0 áram nulla volt. A fenti egyenletből már kifejezhetjük I-t:

$$I = \frac{Bl^2}{L} \cdot \sin\alpha.$$

B, l és L adott állandók, I tehát $\sin\alpha$-val arányos mennyiség. Erre a felismerésre még szükségünk lesz, de mielőtt diszkutálni kezdjük a feladatot, gondoljuk át, milyen fizikai törvényt, összefüggést használhatunk még fel a megoldás során!

Szükségünk lehet energetikai meggondolásra. Írjuk fel a munkatételt (a kinetikai energia tételét)! Eszerint

$$\Delta E_{\text{mozg.}} = \sum W,$$

vagyis

$$\frac{1}{2}\Theta\omega^2 - \frac{1}{2}\Theta\omega_0^2 = mgl(1-\cos\alpha) + 2mg\frac{l}{2}(1-\cos\alpha) - \frac{1}{2}LI^2.$$

(A jobb oldalon az utolsó tag az önindukcióból származó $U_{\text{ind.}} = -L \cdot \Delta I/\Delta t$ feszültség $U_{\text{ind.}} I\Delta t$ munkavégzését fejezi ki.) A fenti összefüggéshez „energiatételként” is eljuthatunk, amely szerint

$$\sum E = \text{állandó}, \quad \text{vagyis} \quad \sum E_{\text{kezdeti}} = \sum E_\alpha,$$

tehát

$$\frac{1}{2}\Theta\omega_0^2 = \frac{1}{2}\Theta\omega^2 - 2mgl(1-\cos\alpha) + \frac{1}{2}LI^2.$$

Most kezdjünk a diszkusszióhoz! Vizsgáljuk meg először azt az esetet, amikor a meglökéssel adott v_0 sebesség kicsi, és emiatt a kilendülési α szög is olyan kicsi, hogy megengedhető a $\sin\alpha \approx \alpha$ és $\cos\alpha \approx 1$ közelítés. Ekkor a forgómozgás dinamikai egyenlete:

$$\Theta\beta = 2mgl\alpha - BIl^2,$$

az áram pedig így függ α-tól:

$$I = \frac{Bl^2}{L}\,\alpha.$$

Behelyettesítve I kifejezését a dinamikai egyenletbe:

$$\Theta\beta = 2mgl\alpha - \frac{B^2l^4}{L}\,\alpha = -\left(\frac{B^2l^4}{L} - 2mgl\right)\alpha.$$

Látjuk, hogy a β szöggyorsulás az α szögkitéréssel arányosnak adódik. Tudjuk, hogy a $\beta = -\Omega^2\alpha$ típusú összefüggés harmonikus rezgésre vezet, mégpedig olyanra, aminek Ω a körfrekvenciája, vagyis a feltételezett esetben olyan harmonikus rezgő „lengésbe” kezd a tekercs, amelynek periódusideje $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$ lesz. $\Theta = \dfrac{5}{3}ml^2$ behelyettesítése után kapjuk:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{5}{3\left(\frac{B^2l^2}{mL} - 2\frac{g}{l}\right)}}.$$

A kilendülés maximális szöge:

$$\alpha_{\max} = \frac{v_0}{\Omega l} = \frac{v_0 T}{2\pi l}.$$

A periódusidőre kapott kifejezést figyelmesen megvizsgálva felvetődik a kérdés: nem állhat ott a gyökjel alatt negatív szám? Mi van akkor, ha $\dfrac{B^2l^2}{mL} < 2\dfrac{g}{l}$? Elég gyenge mágneses tér, kicsiny B esetén ez bizonyára előfordulhat! Visszatérve a dinamikai egyenlethez, azt látjuk, hogy ilyenkor β a $0 < \alpha < 180^\circ$ intervallumon mindig pozitív marad, akármilyen kicsiny is a kezdeti v_0 érték. Sejthető, hogy ilyenkor nem lesz maximális kilendülési szög, hanem a lebillenő tekercs egyre nagyobb szögsebességgel forog, s végül átlendül, átfordul a legalsó helyzetén és szépen visszatér a v_0/l szögsebességű kezdőállapotba. Vagyis folyton-folyvást forogni fog, sose áll meg, mert szupravezető, s így nem disszipálódhat az energia. (Persze még kisugárzódhat, ez további meggondolásokat igényel ...)

Vizsgáljuk meg most azt az esetet, amikor v_0 akármekkora lehet! Vajon milyen feltételek teljesülése esetén áll meg és fordul vissza valahonnan a tekercs, és mikor fog folyamatosan egyirányban forogni?

Mi a megállás feltétele? Ehhez szükségünk lesz az energetikai meggondolásra:

$$\frac{1}{2}\Theta\omega^2 = \frac{1}{2}\Theta\omega_0^2 + 2mgl(1-\cos\alpha) - \frac{1}{2}LI^2.$$

Keressük a megálláshoz, $\omega = 0$-hoz tartozó α szöget:

$$0 = \frac{1}{2}\Theta\omega_0^2 + 2mgl(1-\cos\alpha) - \frac{1}{2}LI^2.$$

Írjuk be ide is az áram szögfüggését:

$$0 = \frac{1}{2}\Theta\omega_0^2 + 2mgl(1-\cos\alpha) - \frac{1}{2}\frac{B^2l^4}{L}\sin^2\alpha.$$

Felhasználva, hogy $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$, jól látszik, hogy $\cos\alpha$-ra kaptunk egy másodfokú egyenletet, ami lényegében ilyen alakú: $a\cos^2\alpha + b\cos\alpha + c = 0$, és aminek megoldása:

$$\cos\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

A meglökött tekercs tehát akkor áll meg valahol, ha a fenti másodfokú egyenletnek van valós megoldása, és ez a megoldás abszolút értékben nem nagyobb 1-nél (hiszen egy szög koszinuszáról van szó).

Teljesülnie kell tehát a következő két feltételnek:

$$b^2 - 4ac \geq 0, \tag{1}$$

$$\left|\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right| \leq 1. \tag{2}$$

Mindez, átfordítva a feladat paramétereire, a következő feltételekhez vezet:

$$\frac{B^2l^2}{mL} \geq 2\,\frac{g}{l},$$

$$v_0 \leq v_{0\,\max} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{3}{5}mL}\left(\frac{B^2l^2}{mL} - 2\frac{g}{L}\right).$$

Ezek teljesülése esetén áll meg valahol a tekercs. A megállási szög koszinuszára kapjuk:

$$\cos\alpha_{\max} = \frac{2mgL}{B^2l^3} + \sqrt{\left(1 - \frac{2mgL}{B^2l^3}\right)^2 - \frac{5mL}{3B^2l^4}v_0^2}.$$

(A gyökjel előtt azért választottuk a pozitív előjelet, mert az felel meg nagyobb $\cos\alpha$-nak, tehát kisebb α szögnek. A tekercs nyilván ott áll meg, ahol *először* teljesül a megállás $\omega = 0$ feltétele.) A megoldásból látszik, hogy minél nagyobb a meglökés v_0 sebessége, annál kisebb lesz $\cos\alpha_{\max}$ értéke, vagyis annál nagyobb $\alpha_{\max}$ szögnél áll meg a tekercs, ahogy azt vártuk is.