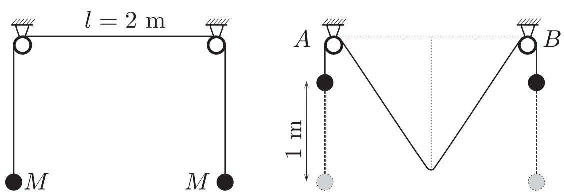
1. *Két rögzített, egymástól* $l = 2$ m *távolságra levő csigán erős, de nem nyúlékony fonalat vezetünk át, és a végeire egy-egy* $M = 1$ kg *tömegű testet erősítünk az* 1.(a) ábra *szerint. (A fonal néhányszor* 10 N *terhelést bír ki szakadás nélkül. A csigák és a fonal tömege elhanyagolható.) Ha ujjunkkal lehúzzuk a fonal közepét úgy, hogy a két test* 1–1 *méterrel megemelkedjék* (1.(b) ábra), *majd elengedjük, a fonal elpattan, amikor A és B között „kiegyenesedik”. Ha azonban úgy engedjük el, hogy előbb egy ugyancsak* 1 kg *tömegű testet erősítünk a fonal közepéhez, akkor a fonal a továbbiakban nem szakad el.*



(a) (b)

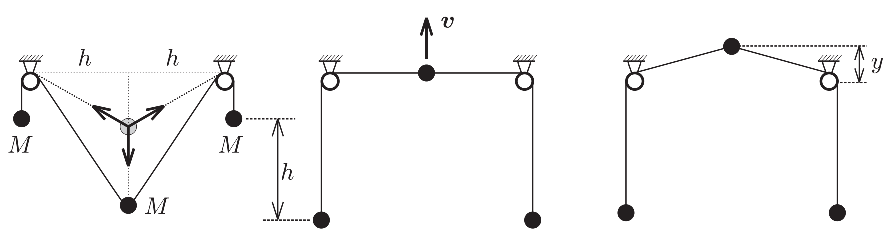
1. ábra

a) *Magyarázzuk meg a jelenséget!*
b) *Mekkora erő feszíti a fonalat abban a pillanatban, amikor kiegyenesedik?*

Megoldás. a) Azt kell észrevenni, hogy amikor a fonal kiegyenesedik, abban a pillanatban a fonalat két oldalról húzó testek már állnak. Rendkívül rövid idő alatt kell megállniuk, lefékeződniük arról a $v = \sqrt{2gh} \approx 16$ km/h sebességről, amire addigi mozgásuk (szabadesés) során felgyorsultak. (Itt és a továbbiakban $h = \frac{1}{2}l = 1$ m.) Ha a fékezést „pillanatszerűnek” gondolnánk, vagyis a fékezés ideje $\Delta t \to 0$ lenne, akkor a testek gyorsulása és a fonalat feszítő F erő is minden határon túl nőne, ezért elpattanna a fonal.

A valóságban természetesen még a „nem nyúlékony” fonal sem abszolút nyújthatatlan, hanem egy kicsit deformálható. Ehhez az alakváltozáshoz egy kicsiny, de véges Δt idő szükséges, így a testek gyorsulása és ezzel együtt a fonalat feszítő erő ha nem is végtelenné, de nagyon naggyá válik. Mivel a fonal nem bír ki nagy erőt, elszakad.

b) Ábrázoljuk a folyamat három jellemző állapotát! A *2.(a) ábrán* a kezdőállapotot tüntettük fel, megjelölve közben a középső test egyensúlyi helyzetét is, amelyen maximális sebességgel átlendül. A *2.(b) ábrán* a fonal középső része vízszintes, a középső test azonban még emelkedik fölfelé. A *2.(c) ábra* azt a pillanatot mutatja, amikor a középső test éppen megáll. Ekkor ismét állnak a szélső testek is. (Persze elképzelhető, hogy a középső test fel se emelkedik a 2.(b) ábrán látható helyzetig, ezt a lehetőséget majd számítással kell ellenőriznünk.)



(a) (b) (c)

2. ábra

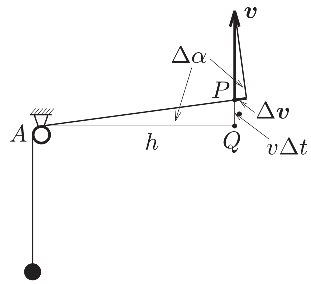
A b) kérdés megfogalmazása arra utal, hogy a fonal ki fog egyenesedni, tehát a középső test eljut a 2.(b) ábrán jelzett állapotba. Lesz-e ott sebessége? Ezt érdemes kiszámítanunk. Írjuk fel a munkatételt a 2.(a) helyzettől a 2.(b)-ig jelzett folyamatra! A szélső testek h utat süllyednek, a középső $h\sqrt{3}$ utat emelkedik, ezért

$$Mgh - Mgh\sqrt{3} + Mgh = \frac{1}{2}Mv^2.$$

Felhasználtuk, hogy a 2.(b) helyzetben a szélső testek egy pillanatra megállnak, ezért csak a középső testnek lehet ekkor mozgási energiája. A felírt egyenletből a középső test sebessége: $v = \sqrt{2g\left(2-\sqrt{3}\right)h} > 0$. Tehát valóban emelkedik még a középső test. Meddig emelkedik? Ezt is kiszámíthatjuk, ha a 2.(b) és a 2.(c) állapotot hasonlítjuk össze energetikailag:

$$2Mg\left(\sqrt{h^2+y^2}-h\right) + Mgy = \frac{1}{2}Mv^2.$$

Ez y-ra nézve másodfokú egyenletté alakítható, melynek megoldásai: $y_1 = -1{,}73\,h$ és $y_2 = +0{,}22\,h$. (Az első gyök nyilván a kezdőállapotot adja meg, a 2.(c) állapotnak y_2 felel meg.)



3. ábra

Hogy válaszolni tudjunk a feladat b) kérdésére, vizsgáljuk meg tüzetesen a 2.(b) ábrán látható helyzetet! Ebben a pillanatban a fonalat feszítő erő gyorsítja az éppen álló, de felfelé induló szélső testeket. Mekkora ez a gyorsulás? Tegyük fel, hogy a bal oldali csigától a középső testhez vezető AP fonál Δt idő alatt már egy kicsiny $\Delta\alpha$ szöggel túllendült a vízszintes helyzeten (*3. ábra*). Jelöljük a szélső testek sebességét Δv-vel! Ez a sebesség (a fonal nyújthatatlansága miatt) megegyezik a P pontban levő középső test sebességének AP irányú vetületével, vagyis

$$\frac{\Delta v}{v} = \sin\Delta\alpha \approx \Delta\alpha.$$

Másrészt a PQA derékszögű háromszögből

$$\frac{v\Delta t}{h} = \operatorname{tg}\Delta\alpha \approx \Delta\alpha.$$

A fenti két egyenlet összevetéséből

$$\Delta v = \frac{v^2}{h}\Delta t,$$

vagyis a szélső testek gyorsulására

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{h}$$

adódik.

Ugyanehhez a képlethez úgy is eljuthatunk, ha felírjuk, hogy a vízszinteshez közeli AP szakasz hossza időben hogyan változik. Mivel $PQ \approx vt$ (ahol t a 2.(b) ábrán látható állapottól mért idő), Pitagorasz tétele szerint

$$AP = \sqrt{h^2 + v^2t^2} = h\sqrt{1 + \frac{v^2t^2}{h^2}} \approx h + \frac{v^2t^2}{2h} = h + \frac{a}{2}t^2.$$

Ebből leolvashatjuk, hogy az AP szakasz hossza $a = v^2/h$ gyorsulással növekszik, s a fonal nyújthatatlansága miatt a bal oldali test is ugyanekkora nagyságú, függőlegesen felfelé irányuló gyorsulással kell rendelkezzék.

A fonal által kifejtett erő a szélső testek mozgásegyenletéből kapható meg:

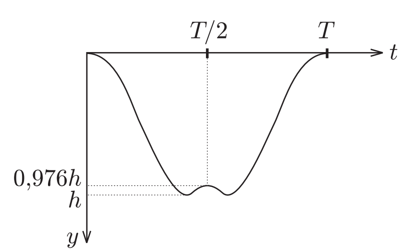
$$F_{\text{fonal}} - Mg = M\frac{v^2}{h},$$

azaz

$$F_{\text{fonal}} = Mg\big[1 + 2\big(2 - \sqrt{3}\,\big)\big] = 1{,}536\,Mg \approx 15\ \text{N}.$$

Így már érthető, miért nem szakad el ebben a helyzetben a „néhányszor 10 N terhelést kibíró” fonal.

Érdemes felfigyelni arra, hogy a szélső testek kétszer is emelkednek és kétszer is süllyednek egy-egy periódus során, hiszen a 2. ábrán feltüntetett mindhárom állapotban éppen állnak. Süllyedésük az idő függvényében nagyjából a *4. ábrán* vázolt módon történik.



4. ábra