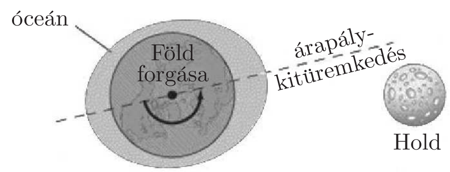
1. feladat. A Föld–Hold rendszer fejlődése

A tudósok nagy pontossággal meg tudják határozni a Föld–Hold távolságot. Ezt úgy végzik el, hogy űrhajósok által 1969-ben a Holdra helyezett speciális tükörre lőtt lézersugár visszaverődési idejét mérik (hátsó belső borító, bal felső ábra).

Ilyen módszerrel közvetlenül megmutatható, hogy a Hold lassan távolodik a Földtől, azaz a Föld–Hold távolság időben lassan növekszik. Ennek oka az, hogy az árapály jelenség során a Föld forgatónyomatékkal hat a Holdra, és így (pálya-) impulzusmomentumát (perdületét) megváltoztatja (*1. ábra*). Ebben a feladatban ennek a jelenségnek a legfontosabb paramétereit vizsgáljuk meg.



1. ábra. A Hold gravitációs hatása következtében a Föld vízfelszínén árapály deformációk, kitüremkedések („bulges") jönnek létre. A Föld forgása miatt a kitüremkedések tengelye nem esik pontosan egybe a Föld–Hold egyenessel. Ez a kis eltérés olyan forgatónyomatékot eredményez, mely a Föld forgásának impulzusmomentumát csökkenti, a Hold pálya menti impulzusmomentumát pedig növeli. Az ábra nem méretarányos

1. Impulzusmomentum-megmaradás

Legyen L_1 a Föld–Hold rendszer jelenlegi impulzusmomentuma. Éljünk a következő közelítő feltevésekkel:

i) L_1 csupán a Földnek a tengely körüli forgásából adódó impulzusmomentumának és a Holdnak a Föld körüli keringéséből adódó (pálya-)impulzusmomentumának összege.

ii) A Hold pályája köralakú, és a Hold pontszerűnek tekinthető.

iii) A Föld forgástengelye és a Hold keringésének tengelye párhuzamos.

iv) A számolás egyszerűsítése érdekében úgy tekintjük, hogy a mozgás a Föld középpontja körül megy végbe, nem pedig a rendszer tömegközéppontja körül. Ebben a feladatban mindenütt minden tehetetlenségi nyomatékot, impulzusmomentumot illetve forgatónyomatékot a Föld tengelyére vonatkoztatunk.

v) A Nap hatását elhanyagoljuk.

1.a. Add meg a Föld–Hold rendszer jelenlegi teljes impulzusmomentumát! Válaszodat a következő mennyiségekkel fejezd ki: a Föld tehetetlenségi nyomatéka: I_{F}; a Föld forgásának jelenlegi szögsebessége: ω_{F1}; a Hold jelenlegi tehetetlenségi nyomatéka a Föld tengelyére vonatkoztatva: I_{H1}; a Hold keringésének jelenlegi szögsebessége: ω_{H1}.

Ez az impulzusmomentum-átadási folyamat addig tart, amíg a Föld forgásának periódusideje egyenlővé nem válik a Hold Föld körüli keringésének idejével. Ekkor a Hold által az óceánok felszínén okozott árapály kitüremkedések („bulges") tengelye egybe fog esni a Föld–Hold egyenessel, és a két égitest közti forgatónyomaték nullává válik.

1.b. Add meg a Föld–Hold rendszer teljes L_2 impulzusmomentumát ebben a végső helyzetben! Ugyanazokkal az egyszerűsítő feltevésekkel dolgozz, mint az 1.a. feladatban. Végeredményedet a következő mennyiségekkel fejezd ki: a Föld tehetetlenségi nyomatéka: I_{F}; a Föld forgásának és a Hold keringésének végső szögsebessége: ω_2; a Hold végső tehetetlenségi nyomatéka: I_{H2}.

1.c. A végső teljes impulzusmomentumban a Föld forgásának járulékát elhanyagolva írd föl az impulzusmomentum-megmaradás egyenletét erre a problémára!

2. Végső pályasugár és végső szögsebesség a Föld–Hold rendszerben

Tegyük föl, hogy a Holdat a gravitációs erő minden esetben a Föld körüli körpályán tartja. A végső, teljes impulzusmomentumban a Föld forgásának járulékát hanyagoljuk el.

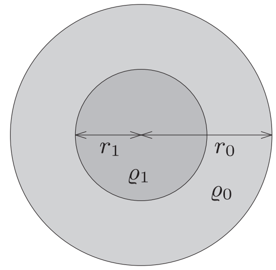
2.a. A végső helyzetben írd föl a Föld körül keringő Holdra a körmozgás alapegyenletét a következő mennyiségek felhasználásával: M_{F}, ω_2, G és D_2, ahol D_2 a végső távolság a Föld és a Hold között, M_{F} a Föld tömege, G pedig a gravitációs állandó.

2.b. Add meg a Hold végső pályasugarát, D_2-t a következő mennyiségekkel: a rendszer teljes impulzusmomentuma: L_1; a Föld, illetve a Hold tömege: M_{F}, illetve M_{H}; a gravitációs állandó G.

2.c. Add meg a Föld–Hold rendszer végső ω_2 szögsebességének képletét az L_1, M_{F}, M_{H} és G mennyiségek segítségével!

Most D_2 és ω_2 számszerű értékét határozzuk meg. Ehhez szükség van a Föld tehetetlenségi nyomatékára.

2.d. Tételezzük föl, hogy a Föld sűrűsége belül, a középponttól r_1 sugárig ϱ_1, míg ezen kívül, tehát az r_1 sugártól a felszínig, r_0-ig a sűrűség ϱ_0. Add meg a Föld I_{F} tehetetlenségi nyomatékának képletét (*2. ábra*)!



2. ábra. A gömb alakú Föld a két különböző, ϱ_1 és ϱ_0 sűrűségű tartománnyal

Ebben a feladatban a kért számadatokat **minden esetben** *két értékes jegy* pontossággal határozd meg!

2.e. Határozd meg a Föld I_F tehetetlenségi nyomatékának számértékét, felhasználva, hogy $\varrho_1 = 1{,}3 \cdot 10^4$ kg m^{-3}, $r_1 = 3{,}5 \cdot 10^6$ m, $\varrho_0 = 4{,}0 \cdot 10^3$ kg m^{-3} és

$r_0 = 6{,}4 \cdot 10^6$ m.

A Föld, illetve a Hold tömege $M_\mathrm{F} = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg, illetve $M_\mathrm{H} = 7{,}3 \cdot 10^{22}$ kg. A két égitest jelenlegi távolsága $D_1 = 3{,}8 \cdot 10^8$ m. A Föld forgásának jelenlegi szögsebessége $\omega_\mathrm{F1} = 7{,}3 \cdot 10^{-5}$ s^{-1}. A Hold Föld körüli keringésének jelenlegi szögsebessége $\omega_\mathrm{H1} = 2{,}7 \cdot 10^{-6}$ s^{-1}, a gravitációs állandó értéke pedig

$G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}.

2.f. Határozd meg a rendszer L_1 teljes impulzusmomentumának számértékét!

2.g. Határozd meg a végső, D_2 pályasugár értékét méterben, valamint a jelenlegi, D_1 pályasugár arányában!

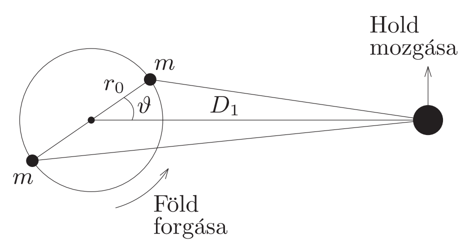
2.h. Határozd meg a végső, ω_2 szögsebesség értékét s^{-1}-ban, valamint add meg a végső helyzetben egy nap hosszát a jelenlegi nap hosszának arányában!

Ellenőrizd, hogy a végső, teljes impulzusmomentumban a Föld forgásából adódó járulék valóban elhanyagolható! Ehhez azt kell megmutatni, hogy a Föld és a Hold végső impulzusmomentumának aránya kis szám.

2.i. Határozd meg a végső helyzetben a Föld és a Hold impulzusmomentumának arányát!

3. Mennyivel távolodik a Hold évenként?

Ebben a részben azt határozzuk meg, hogy mennyivel távolodik a Hold a Földtől évenként. Ehhez először ki kell számolni, hogy jelenleg mekkora forgatónyomatékot fejt ki a Föld a Holdra. Tegyük fel, hogy az árapály deformációból származó kitüremkedések két m tömegű tömegponttal közelíthetőek, melyek a Föld felszínén helyezkednek el (*3. ábra*). Legyen továbbá ϑ a Föld–Hold egyenesnek a kitüremkedések tengelyével bezárt szöge.



3. ábra. Vázlat a dagály-kitüremkedések által a Holdra kifejtett forgatónyomaték számolásához. Az ábra nem méretarányos

3.a. Add meg a Holdhoz közelebbi tömegpont Holdra ható gravitációs erejének F_c nagyságát!

3.b. Add meg a Holdtól távolabbi tömegpont Holdra ható gravitációs erejének F_f nagyságát!

Ezután meghatározhatjuk a tömegpontok forgatónyomatékát.

3.c. Határozd meg a közelebbi tömegpont Holdra ható τ_c forgatónyomatékának nagyságát!

3.d. Határozd meg a közelebbi tömegpont Holdra ható τ_f forgatónyomatékának nagyságát!

3.e. Határozd meg a két tömegpont τ eredő forgatónyomatékának nagyságát! Mivel $r_0 \ll D_1$, az eredményt r_0/D_1 első nem eltűnő hatványáig sorbafejtve add meg. Felhasználhatod, hogy $(1+x)^a \approx 1 + ax$, ha $x \ll 1$.

3.f. Add meg a τ forgatónyomaték számértékét, felhasználva, hogy $\vartheta = 3^\circ$, és $m = 3{,}6 \cdot 10^{16}$ kg. (Megjegyzendő, hogy ennek a tömegnek a nagyságrendje 10^{-8}-szorosa a Föld tömegének.)

Felhasználva, hogy a forgatónyomaték az impulzusmomentum időbeli változási sebessége, határozd meg a Föld–Hold távolság éves növekedésének jelenlegi értékét! Ehhez fejezd ki a Hold impulzusmomentumát kizárólag az M_H, M_F, D_1 és G mennyiségekkel.

3.g. Határozd meg a Föld–Hold távolság évenkénti növekedésének jelenlegi értékét!

Végül becsüld meg, hogy mennyivel nő egy év alatt egy nap hossza.

3.h. Add meg, hogy egy év alatt mennyivel csökken ω_F1, és jelenleg mennyivel nő egy nap hossza egy év alatt!

4. Hová lesz az energia? Az impulzusmomentummal szemben, ami megmarad, a rendszer teljes mechanikai energiája (forgási és gravitációs) nem állandó. Az utolsó részben ezt a kérdést vizsgáljuk.

4.a. Add meg a Föld–Hold rendszer teljes E mechanikai energiáját (forgási- plusz gravitációs energiáját) az égitestek jelenlegi helyzetében! Az eredményt kizárólag az I_{F}, ω_{F1} , M_{H}, M_{F}, D_1 és G mennyiségekkel fejezd ki!

4.b. Fejezd ki az E energia megváltozását, ΔE-t a D_1 és ω_{F1} mennyiségek megváltzásával! Határozd meg ΔE számszerű értékét egy évre vonatkoztatva, felhasználva a D_1 és ω_{F1} mennyiségek megváltozásának $3g$ és $3h$ pontban kiszámolt értékét!

Most ellenőrizzük, hogy az így kapott energiaveszteség összeegyeztethető azzal a hővel, amit a Hold árapály hatása hoz létre a Földön. Tegyük föl, hogy a dagály átlagosan 0,5 m-rel emel meg egy $h = 0{,}5$ m mély vízréteget, a Föld teljes felszínén. (Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy a Föld teljes felszíne vízzel van borítva.) Ez az emelkedés (dagály) minden nap kétszer következik be. Tegyük fel továbbá, hogy a víz viszkozitásának következtében ennek a gravitációs energiának 10%-a disszipálódik hő formájában apály alkalmával. A víz sűrűsége $\varrho_{\text{víz}} = 10^3$ kg m^{-3}, és a Föld felszínén a gravitációs gyorsulás $g = 9{,}8$ m s^{-2}.

4.c. Mekkora a szóban forgó felületi vízréteg tömege?

4.d. Határozd meg, hogy mennyi energia disszipálódik egy év alatt! Milyen viszonyban áll ez a Föld–Hold rendszer mechanikai energiájának jelenlegi évenkénti csökkenésével?