Hawking-sugárzás

Bárhol is találkozunk a fizikában egy egyenlőséggel, az egyenlet mindkét oldala ugyanolyan típusú, azaz ugyanolyan dimenziójú. Például nem lehetséges, hogy az egyenlet jobb oldala hosszúságnak felel meg, míg a bal oldalon álló mennyiség idő intervallumnak. Ezt a tényt felhasználva időnként (számfaktoroktól eltekintve) fizikai összefüggéseket állapíthatunk meg a probléma analitikus megoldása nélkül. Például, ha azt kérdezzük, hogy a h magasságból elengedett test mennyi idő alatt esik le az állandónak tekinthető g gravitációs gyorsulás hatására, akkor úgy érvelhetünk, hogy egy idő intervallumot reprezentáló mennyiséget kell felépítenünk g és h segítségével, és ennek egyetlen módja ez: $T = a(h/g)^{1/2}$. Vegyük észre, hogy ez a megoldás tartalmaz egy *dimenzió nélküli,* nem meghatározott a együtthatót, melyet ezzel a módszerrel nem lehet megkapni. Ez az együttható egy ilyen szám lehet: 1, 1/2, $\sqrt{3}$, π vagy bármilyen más valós szám. Fizikai összefüggéseknek ilyen módszerrel történő levezetését *dimenzióanalízisnek* nevezzük. Dimenzióanalíziskor a dimenzió nélküli együtthatók nem fontosak, és ezért nem szükséges leírni ezeket. Szerencsére a legtöbb fizikai probléma esetén ezek az együtthatók nagyságrendileg 1 körüli számok, és elhagyásuk nem változtatja meg a fizikai mennyiségek számértékének nagyságrendjét. Ennek megfelelően a fenti probléma esetén a dimenzió-analízis módszerével ezt az eredményt kapjuk: $T = (h/g)^{1/2}$.

Általánosságban egy fizikai mennyiség dimenziója felírható négy alapmennyiség dimenziójával: M (tömeg), L (hosszúság), T (idő), és K (hőmérséklet). Egy tetszőleges x mennyiség dimenzióját így jelöljük: $[x]$. Példaként megmutatjuk, hogy a v sebesség, az E_k mozgási (kinetikus) energia és a C_V hőkapacitás dimenziója így írható fel: $[v] = LT^{-1}$, $[E_k] = ML^2T^{-2}$, $[C_V] = ML^2T^{-2}K^{-1}$.

Alapvető állandók és a dimenzióanalízis kapcsolata

1.1. (*0,8 pont*) Határozd meg az alapvető állandók, azaz a h Planck-állandó, a c fénysebesség, a G egyetemes gravitációs állandó és a k_B Boltzmann-állandó dimenzióját a hosszúság, a tömeg, az idő és a hőmérséklet dimenziója segítségével!

A Stefan–Boltzmann-törvény szerint a feketetest által kisugárzott intenzitás (vagyis az egységnyi felület által egységnyi idő alatt kisugárzott energia) így adható meg: $\sigma\theta^4$, ahol σ a Stefan–Boltzmann-állandó és θ a feketetest abszolút hőmérséklete.

1.2. (*0,5 pont*) Határozd meg a Stefan–Boltzmann-álladó dimenzióját a hosszúság, a tömeg, az idő és a hőmérséklet dimenziója segítségével!

A Stefan–Boltzmann-állandó nem alapvető állandó, és így felírható az alapvető állandók segítségével, azaz ilyen módon: $\sigma = ah^{\alpha}c^{\beta}G^{\gamma}k_B^{\delta}$. Ebben az összefüggésben a egy 1 nagyságrendű dimenzió nélküli paraméter. Amint ezt az előzőekben említettük, a pontos értéke a mi szempontunkból érdektelen, ezért egyszerűen vegyük 1-nek.

1.3. (*1,0 pont*) Határozd meg α, β, γ és δ értékét dimenzióanalízissel!

A fekete lyukak fizikája. Ebben a részben dimenzióanalízis segítségével megpróbáljuk meghatározni a fekete lyukak néhány tulajdonságát. Egy bizonyos fizikai elméletnek megfelelően, amit *„no hair”* („haja nincs”) elméletnek hívunk, a fekete lyukak összes jellemzője, amelyekkel ebben a feladatban foglalkozunk, kizárólag csak a fekete lyukak tömegétől függ. Egy fekete lyuk egyik jellemzője az *eseményhorizontjának* a területe. Durván azt mondhatjuk, hogy az eseményhorizont a fekete lyuk határa. Ezen a határon belül a gravitáció olyan erős, hogy az ezzel határolt tartományt még a fény sem képes elhagyni.

Szeretnénk kapcsolatot találni egy fekete lyuk m tömege és az eseményhorizont A területe között. Ez a terület a fekete lyuk tömegétől, a fénysebességtől és az egyetemes gravitációs állandótól függ. Az 1.3 alkérdés mintájára ezt írhatjuk fel: $A = G^{\alpha}c^{\beta}m^{\gamma}$.

2.1. (*0,8 pont*) Dimenzióanalízis segítségével határozd meg α, β, és γ értékét!

A 2.1. alkérdés eredménye világosan megmutatja, hogy egy fekete lyuk eseményhorizontjának a területe a lyuk tömegével növekszik. Klasszikus leírás szerint semmi sem jön ki a fekete lyukból, és ezért akármilyen fizikai folyamat is történik, az eseményhorizont területe csak növekedhet. A termodinamika második főtételével analógiába állítva ezt, *Jacob Bekenstein* azt javasolta, hogy érdemes bevezetni a fekete lyukak S entrópiáját, amit tekintsünk arányosnak a lyuk eseményhorizontjának területével, azaz $S = \eta A$. Más érvelések megerősítették ezt a felvetést.

2.2. (*0,2 pont*) Az entrópia termodinamikai definíciója ($dS = dQ/\theta$) alapján határozd meg az entrópia dimenzióját! dQ a hőközlés mértéke és θ a rendszer abszolút hőmérséklete.

2.3. (*1,1 pont*) Ugyanúgy, mint az 1.3. alkérdésben, fejezd ki a dimenzióval rendelkező η állandót mint az alapvető fizikai állandók (h, c, G, és k_B) függvényét!

A továbbiakban ne használd a dimenzióanalízis módszerét, azonban felhasználhatod az eddigi alkérdésekre kapott eredményeidet!

3. Hawking-sugárzás. Fél-kvantummechanikai tárgyalással *Stephen Hawking* úgy érvelt, hogy – a klasszikus tárgyalással ellentétben – a fekete lyukak a feketetest-sugárzáshoz hasonlóan sugárzást bocsáthatnak ki. Úgy sugároznak, mint egy adott hőmérsékletű feketetest, ezt a hőmérsékletet *Hawking-hőmérsékletnek* nevezzük.

3.1. (*0,8 pont*) Az $E = mc^2$ összefüggést felhasználva, ami megadja egy fekete lyuk energiáját a tömegével kifejezve, továbbá a termodinamika törvényei alapján, fejezd ki egy fekete lyuk θ_{H} Hawking-hőmérsékletét tömegének és az alapvető fizikai állandóknak a segítségével! Tételezd fel, hogy a fekete lyuk nem végez munkát a környezetén!

3.2. (*0,7 pont*) Egy környezetétől elszigetelt fekete lyuk a Hawking-sugárzás következtében változtatja a tömegét. A Stefan–Boltzmann-törvény felhasználásával határozd meg, hogyan függ a fekete lyuk tömegének időbeli változási sebessége (deriváltja) a θ_{H} Hawking-hőmérséklettől, és fejezd ki ezt a deriváltat a fekete lyuk tömege, valamint az alapvető fizikai állandók segítségével!

3.3. (*1,1 pont*) Határozd meg azt a t^* időt, ami ahhoz szükséges, hogy egy környezetétől teljesen elszigetelt m tömegű fekete lyuk teljesen „elpárologjon", azaz teljesen elveszítse tömegét!

A termodinamika nézőpontjából a fekete lyukak különleges viselkedésekre képesek. Például egy fekete lyuk hőkapacitása negatív.

3.4. (*0,6 pont*) Határozd meg egy m tömegű fekete lyuk hőkapacitását!

4. A fekete lyukak és a kozmikus háttérsugárzás. Tekintsünk egy olyan fekete lyukat, ami ki van téve a kozmikus háttérsugárzásnak. A kozmikus háttérsugárzás egy olyan θ_B hőmérsékletű feketetest sugárzás, ami kitölti az egész világmindenséget. Ezért egy A teljes felületű test egységnyi idő alatt $\sigma\theta_B^4 \cdot A$ energiát kap. Ennek megfelelően egy fekete lyuk egyrészt energiát veszít a Hawking-sugárzás következtében, másrészt energiát nyer a kozmikus háttérsugárzásból.

4.1. (*0,8 pont*) Határozd meg a fekete lyuk tömegének az időbeli változási sebességét a fekete lyuk tömege, a kozmikus háttérsugárzás hőmérséklete és az alapvető fizikai állandók segítségével!

4.2. (*0,4 pont*) Bizonyos m^* tömeg esetén ez a derivált eltűnik. Határozd meg ezt az m^* tömeget, és fejezd ki θ_B és az alapvető fizikai állandók segítségével!

4.3. (*0,2 pont*) Használd fel a 4.2. alkérdésre adott válaszodat, fejezd ki belőle θ_B értékét, és helyettesítsd be a 4.1. részben kapott képletbe. Határozd meg a fekete lyuk tömegének időbeli változási sebességét m, m^* és az alapvető fizikai állandók segítségével!

4.4. (*0,4 pont*) Határozd meg egy fekete lyuk Hawking-hőmérsékletét, amikor a lyuk termikus egyensúlyban van a kozmikus háttérsugárzással!

4.5. (*0,6 pont*) Ez az egyensúly stabil vagy instabil? Miért? (Válaszodat matematikailag indokold!)