Szerencsétlenül járt műhold

A mesterséges égitestek manőverezés során leggyakrabban repülésük irányában változtatják meg sebességüket, azaz felgyorsítanak, hogy magasabb pályákra kerüljenek, vagy lefékeznek, hogy visszatérjenek a légkörbe. Ezzel szemben ebben a feladatban most kizárólag olyan pályamódosításokat vizsgálunk, melyeknek során a mesterséges égitest sugár irányú lökéssel módosítja sebességét.

A numerikus eredmények meghatározásához használd a következő értékeket: a Föld sugara $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m, a nehézségi gyorsulás a Föld felszínén $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$, és a sziderikus nap hosszát tekintsd $T_0 = 24{,}0$ h-nak.

Tekintsünk egy m tömegű távközlési műholdat, mely r_0 sugarú geostacionárius[1] pályán kering pontosan az Egyenlítő egy pontja fölött. A műhold manőverező hajtóművének megfelelő lökéseivel állt a pontos pályára.

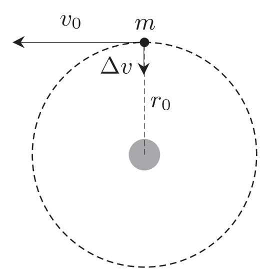
Az egyes részkérdésekre kapható pontszám a feladat sorszáma után zárójelben található.

1. Kérdés. (a) Számold ki r_0 számszerű értékét!

(b) Add meg a műhold v_0 sebességét, mint a g, R_T és r_0 paraméterek függvényét, valamint határozd meg a sebesség számszerű értékét!

(c) Határozd meg a műhold L_0 perdületét (impulzusmomentumát), valamint E_0 teljes mechanikai energiáját, mint a v_0, m, g és R_T paraméterek függvényét!

Amint a műhold elérte a geostacionárius pályát (lásd az *F-1. ábrát*), stabilizálta helyzetét, és munkára kész állapotba került, a földi irányítóközpont hibájának következtében a menőverező hajtómű rövid időre újra bekapcsolódott. A hajtómű a műholdat a Föld irányába lökte meg, és annak ellenére, hogy a földi irányítóközpont szinte azonnal reagált, és kikapcsolta a hajtóművet, a műhold sebessége egy nem kívánt Δv értékkel módosult. A lökést a $\beta = \Delta v / v_0$ lökési paraméterrel jellemezzük. A manőver időtartama jóval rövidebb, mint a műhold keringésének bármilyen más jellemző ideje, tehát a lökés pillanatszerűnek tekinthető.



F-1. ábra

2. Kérdés. Tegyük föl, hogy $\beta < 1$.

2.1. Határozd meg az új pályát jellemző mennyiségeket[2], azaz a pálya poláris egyenletében szereplő l paramétert (*semi-latus-rectum = „fél-merőleges-távolság”*) és az ε *excentricitást* az r_0 és β paraméterek függvényében!

2.2. Határozd meg az új pálya főtengelye és a véletlen pályamódosítás helyvektora közti α szöget! (A helyvektor kezdőpontja a Föld középpontja.)

2.3. Határozd meg a pálya földközeli, illetve földtávoli pontjának $r_{\min}$, illetve $r_{\max}$ távolságát a Föld középpontjától, mint az r_0 és β paraméterek függvényét, valamint add meg a kifejezések számszerű értékét $\beta = 1/4$ esetén!

2.4. Határozd meg a módosult pálya T keringési idejét, mint a T_0 és β paraméterek függvényét, és add meg a keringési idő számszerű értékét $\beta = 1/4$ esetén!

3. Kérdés.

3.1. Határozd meg azt a legkisebb β_{esc} lökési paramétert, amely mellett a műhold elhagyja a Föld gravitációs terét!

3.2. Ebben az esetben határozd meg a műhold pályájának a Földet legjobban megközelítő pontjának $r'_{\min}$ távolságát a Föld középpontjától, mint az r_0 paraméter függvényét!

4. Kérdés. Tegyük föl, hogy $\beta > \beta_{\text{esc}}$.

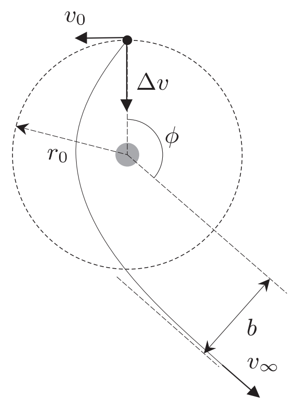
4.1. Határozd meg a v_0 és β paraméterek függvényeként, hogy mekkora v_∞ sebessége marad a műholdnak, ha végtelen messzire eltávolodik a Földtől!

4.2. Határozd meg a végtelen távoli mozgást jellemző b „impakt paramétert”, mint az r_0 és β paraméter függvényét! (Lásd: *F-2. ábra.*)

---

[1] A pályához tartozó keringési idő T_0.

[2] Nézd át a feladat végén található „segítséget”!



F-2. ábra

4.3. Határozd meg a végtelen távoli mozgás irányának ϕ szögét, mint a β paraméter függvényét! (Lásd: *F-2. ábra.*) Add meg a szög számszerű értékét a $\beta = \frac{3}{2}\beta_{\text{esc}}$ esetre!

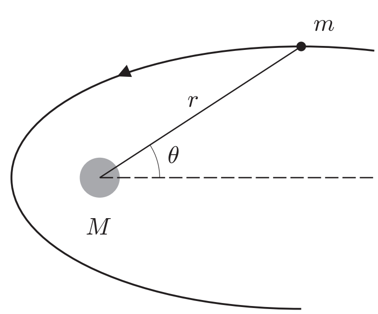
Segítség. A távolság négyzetének reciprokával csökkenő, centrális erőtérben mozgó testek ellipszis, parabola vagy hiperbola pályán mozognak. Az $m \ll M$ közelítés mellett a centrális gravitációs teret létrehozó M tömeg a pálya egyik fókuszában van. A koordináta-rendszer kezdőpontját ebben a pontban felvéve, a fenti pályák általános, polárkoordinátás egyenlete (lásd: *F-3. ábra*)

$$r(\theta) = \frac{l}{1 - \varepsilon\cos\theta}$$

alakú, ahol az l pozitív állandó a görbe *paramétere* (*semi-latus-rectum* = *fél-merőleges-távolság*), ε pedig a pálya *excentriciása.* A mozgást jellemző megmaradó mennyiségekkel kifejezve:

$$l = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \text{és} \quad \varepsilon = \left(1 + \frac{2\,EL^2}{G^2M^2m^3}\right)^{1/2},$$

ahol G a gravitációs állandó, L a keringő test perdületének (impulzusmomentumának) nagysága a középpontra vonatkoztatva, E pedig a mechanikai energiája. (A potenciális energia zéruspontja a végtelenben van.)



F-3. ábra

A következő három esetet különböztethetjük meg:
i) Ha $0 \le \varepsilon < 1$, a görbe ellipszis ($\varepsilon = 0$ esetén kör).
ii) Ha $\varepsilon = 1$, a görbe parabola.
iii) Ha $\varepsilon > 1$, a görbe hiperbola.