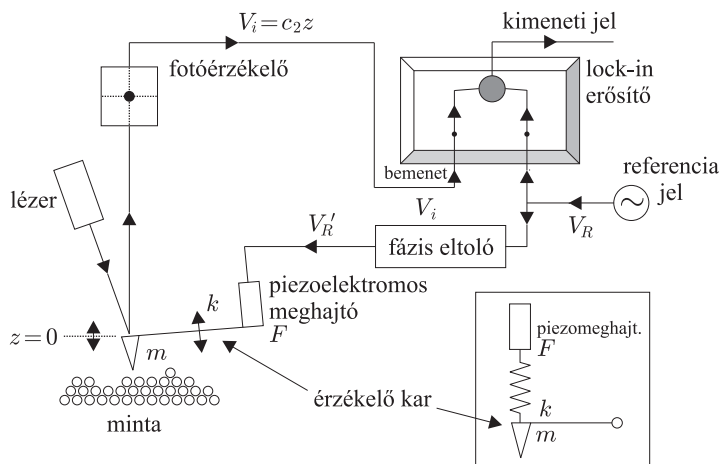


3. feladat. Atomi erő mikroszkóp

Az atomi erő mikroszkóp (Atomic probe microscope, APM) a nano-tudomány igen hatékony eszköze. Az APM érzékelő karjának elmozdulását egy fotóérzékelő detektálja, az érzékelő karról visszavert lézersugár segítségével, ahogyan a 2. ábrán látható. Az érzékelő kar csak függőleges irányban képes mozogni, és a kar z elmozdulása az idő (t) függvényében a következő differenciálegyenlettel írható le:

$$(3.1) \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + kz = F,$$

ahol m a kar tömege, $k = m\omega_0^2$ az érzékelő kart jellemző rugóállandó, b egy kicsiny csillapítási állandó, melyre teljesül, hogy $\omega_0 \gg (b/m) > 0$, és végül F a piezoelektromos meghajtó által keltett külső gerjesztő erő.



2. ábra. Az atomi erő mikroszkóp (APM) vázlatos rajza. Az ábra jobb alsó sarkában látható kinagyított rész a piezoelektromos meghajtó és az érzékelő kar közötti csatolás egyszerűsített mechanikai modelljét mutatja

A rész

(a) (1,5 pont) Ha a gerjesztő erő $F = F_0 \sin \omega t$ alakú, akkor a (3.1) egyenlet $z(t)$ megoldása $z(t) = A \sin(\omega t - \phi)$ alakban írható, ahol $A > 0$ és $0 \leq \phi \leq \pi$. Fejezd ki az A amplitúdót valamint a ϕ fázist az F_0 , m , ω , ω_0 és b paraméter függvényében! Határozd meg az amplitúdót és a ϕ fázist az $\omega = \omega_0$ rezonanciafrekvencián!

(b) (1 pont) A 2. ábrán szereplő lock-in erősítőben létrejön a bemeneti jelnek és a $V_R = V_{R_0} \sin \omega t$ úgynevezett lock-in referencia jelnek a szorzata, és az erősítő kimenetén a szorzatnak *csak* az egyenáramú (DC) komponense jelenik meg. Tegyük föl, hogy a bemeneti jel $V_i = V_{i_0} \sin(\omega_i t - \phi_i)$ alakú. Az itt szereplő V_{R_0} , V_{i_0} , és ϕ_i mennyiségek mindegyike adott pozitív állandó. Határozd meg, hogy milyen $\omega (> 0)$ frekvencia mellett kapunk nem zérus kimenő jelet! Add meg a nem zérus, *egyenáramú (DC) kimenő jel* nagyságát leíró formulát ezen a frekvencián!

(c) (1,5 pont) A „fázistoló” egységen átjutó, eredetileg $V_R = V_{R_0} \sin \omega t$ alakú lock-in referencia jel alakját a fázistoló egység után a $V_R' = V_{R_0} \sin(\omega t + \pi/2)$ formula írja le. A V_R' feszültség hatására a piezoelektromos meghajtó az érzékelő kart $F = c_1 V_R'$ erővel gerjeszti. Ezután a fotóérzékelő az érzékelő kar z elmozdulását $V_i = c_2 z$ alakú feszültségjellel alakítja. A formulákban szereplő c_1 és c_2 mennyiségek állandók. Határozd meg a nem zérus, *egyenáramú (DC) kimenő jel* nagyságát leíró formulát az $\omega = \omega_0$ frekvencián!

(d) (2 pont) Az érzékelő kar tömegének kicsiny Δm megváltozása $\Delta\omega_0$ -al eltolja a rezonanciafrekvenciát. Ennek következtében az eredeti, rezonanciafrekvenciához tartozó ϕ fázis is $\Delta\phi$ -vel eltolódik. Határozd meg azt a Δm tömeg változást, melynek hatására $\Delta\phi = \pi/1800$ nagyságú fáziseltolódás jön létre! Tipikusan ilyen nagyságú a fázistolás-mérések pontossága. Az érzékelő kart jellemző fizikai paraméterek értéke a következő: $m = 1,0 \cdot 10^{-12}$ kg, $k = 1,0$ N/m és $(b/m) = 1,0 \cdot 10^3$ s⁻¹. Használd az $|x| \ll 1$ esetén érvényes $(1+x)^a \approx 1+ax$ és $\text{tg}(\pi/2+x) \approx -1/x$ közelítő formulákat!

B rész

Mostantól kezdve azt az esetet vizsgáljuk, amikor az A részben tárgyalt gerjesztő erőn kívül még az 2. ábrán látható minta is hat valamilyen erővel az érzékelő karra.

(e) (1,5 pont) Annak ismeretében, hogy a minta által kifejtett $f(h)$ erő csak a minta felszíne és az érzékelő kar közötti h távolságtól függ, meghatározható az érzékelő kar egyensúlyi helyzetének új h_0 értéke. A $h = h_0$ érték közelében az erő az $f(h) \approx f(h_0) + c_3(h-h_0)$ alakban írható fel, ahol c_3 állandó, nem függ h -tól. Fejezd ki az új ω_0' rezonanciafrekvenciát ω_0 , m és c_3 segítségével!

(f) (2,5 pont) A mintát a mikroszkópban vízszintesen mozgatva pásztázzuk a minta felszínét. Az érzékelő kar tije, melynek töltése $Q = 6e$, egy $q = e$ töltésű, a felszín alatt bizonyos mélységben csapdába került (térben lokalizált) elektron közelébe jut. A csapdázott elektron környékén pásztázva a felszínt, a rezonanciafrekvencia maximálisan észlelhető eltolódása $\Delta\omega_0 (= \omega_0' - \omega_0)$, ami jóval kisebb, mint ω_0 . Fejezd ki a csapdázott elektron és az érzékelő kar

közötti d_0 távolságot maximális frekvencia eltolódás esetén az $m, q, Q, \omega_0, \Delta\omega_0$ mennyiségek és a k_e Coulomb állandó segítségével! Határozd meg d_0 számértékét nm-ben ($1 \text{ nm} = 1 \cdot 10^{-9} \text{ m}$) $\Delta\omega_0 = 20 \text{ s}^{-1}$ frekvencia eltolódás mellett!

Az érzékelő kar fizikai paraméterei: $m = 1,0 \cdot 10^{-12} \text{ kg}$ és $k = 1,0 \text{ N/m}$. Az érzékelő kar tűjében, valamint a minta felületén tekintsünk el a polarizációs effektusoktól. Fizikai állandók: $k_e = 1/4\pi\epsilon_0 = 9,0 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ és $e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.