2. feladat. Felemelkedő ballon

Egy héliummal töltött gumiballon a levegőben magasra emelkedik, olyan régiókba, ahol a nyomás és a hőmérséklet a magasság növekedésével csökken. A következő kérdések tanulmányozásánál tételezzük fel, hogy a ballon a terheléstől függetlenül minden esetben gömbölyű marad, és hanyagoljuk el a terhelés térfogatát. Tegyük fel azt is, hogy a ballonban lévő héliumgáz hőmérséklete mindig azonos a környező levegő hőmérsékletével, és minden gázt kezeljünk ideális gázként. Az univerzális gázállandó $R = 8{,}31$ J/mol $\cdot$ K, és a hélium, illetve a levegő moláris tömege rendre $M_{\mathrm{H}} = 4{,}00 \cdot 10^{-3}$ kg/mol, illetve $M_{\mathrm{A}} = 28{,}9 \cdot 10^{-3}$ kg/mol. A nehézségi gyorsulás $g = 9{,}8$ m/s^2.

A rész: (a) (*1,5 pont*) A környező levegő nyomása legyen P, hőmérséklete pedig T. A ballon „felületi feszültségének" következtében a ballon belsejében a nyomás nagyobb a külső nyomásnál. A ballon n mol héliumgázt tartalmaz, és a belsejében a nyomás $P + \Delta P$. Határozd meg a ballonra ható felhajtóerőt P és ΔP függvényében!

(b) (*2 pont*) Egy szép nyári napon Koreában a levegő T hőmérséklete a tengerszint feletti z magasság függvényében a $T(z) = T_0(1 - z/z_0)$ függvény szerint változott a $0 < z < 15$ km tartományban, ahol $z_0 = 49$ km és $T_0 = 303$ K. A tengerszinten a nyomás, illetve a sűrűség értéke $P_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa, illetve $\varrho_0 = 1{,}16$ kg/m^3 volt. Ebben a magasság tartományban a nyomás a

$$P(z) = P_0(1 - z/z_0)^{\eta}. \tag{2.1}$$

formulával adható meg. Fejezd ki az η kitevőt a z_0, ϱ_0, P_0 és g paraméterekkel, és határozd meg numerikus értékét *két értékes számjegy* pontossággal. A nehézségi gyorsulást tekintsd a magasságtól független konstansnak.

B rész: Ha egy gömb alakú, nyújtatlan állapotban r_0 sugarú gumiballont r ($> r_0$) sugarúra fújunk fel, a gumi megnyúlása miatt a ballon felülete extra rugalmas energiára tesz szert. Egy egyszerű elmélet szerint állandó T hőmérsékleten ennek a rugalmas energiának az értéke

$$U = 4\,\pi\, r_0^2 \kappa\, RT \left(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3\right), \tag{2.2}$$

ahol a $\lambda \equiv r/r_0$ (≥ 1) számértéket lineáris méretnövekedési aránynak nevezzük, a κ paraméter pedig egy mol/m^2 dimenziójú állandó.

(c) (*2 pont*) Fejezd ki ΔP-t a (2.2) egyenletben szereplő paraméterek függvényében, és ábrázold vázlatosan a ΔP nyomáskülönbséget a $\lambda = r/r_0$ mennyiség függvényében.

(d) (*1,5 pont*) A κ konstans meghatározható a ballon felfújásához szükséges gáz mennyiségéből. A feszítetlen falú ($\lambda = 1$) ballon $T_0 = 303$ K hőmérsékleten és $P_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa nyomáson $n_0 = 12{,}5$ mol héliumot tartalmaz. Ugyanezen a T_0 hőmérsékleten és P_0 nyomáson a $\lambda = 1{,}5$ méretűre felfújt ballon összesen $n = 3{,}6 \cdot n_0 = 45$ mol héliumot tartalmaz. Fejezd ki n, n_0 és λ segítségével az $a = \kappa/\kappa_0$ képlettel definiált úgynevezett „ballonparamétert", ahol $\kappa_0 \equiv \dfrac{r_0 P_0}{4RT_0}$, valamint határozd meg a értékét két értékes számjegy pontossággal.

C rész: A ballont tengerszinten a (d) pontban leírt módon készítjük elő (azaz $n = 3{,}6 \cdot n_0 = 45$ mol hélium gázzal $\lambda = 1{,}5$ méretűre fújjuk fel $T_0 = 303$ K hőmérsékleten és $P_0 = 1$ atm $= 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa nyomáson). A szerkezet teljes tömege (figyelembe véve a gumiballont, a bezárt gázt és minden egyéb terhet) $M_T = 1{,}12$ kg. Ekkor a tengerszintről elengedjük a ballont.

(e) (*3 pont*) Tegyük fel, hogy a ballon z_f magasságig emelkedik, és ott megáll. Ezen a szinten a felhajtóerő egyensúlyt tart a nehézségi erővel. Határozd meg z_f értékét, valamint ebben a magasságban a λ_f paramétert (lineáris méretnövekedési arányt). Válaszodat két értékes jegy pontossággal add meg. A ballon nem sodródik oldalirányban, és nem szökik el belőle gáz.