2. feladat. Piezoelektromos kristályrezonátor elektromos váltófeszültséggel

Tekintsünk egy homogén, A keresztmetszetű rudat, melynek mechanikai feszültségektől mentes állapotban a hossza ℓ (*3. ábra*).

3. ábra

Ha a rúd két végén azonos nagyságú, de ellentétes irányú, a felületre merőleges F erő hat, a rúd hossza $\Delta\ell$-lel megváltozik. A T *mechanikai feszültséget* a rúd végein az F/A képlet definiálja. A rúd hosszának relatív megváltozását, azaz $\Delta\ell/\ell$-t deformációnak nevezzük, és S-sel jelöljük. A mechanikai feszültség és a deformáció segítségével a Hooke-törvényt a következő alakban is felírhatjuk:

$$T = Y\,S \qquad \text{vagy} \qquad \frac{F}{A} = Y\,\frac{\Delta\ell}{\ell}, \tag{1}$$

ahol Y a rúd anyagának *Young-modulusa*. Jegyezzük meg, hogy T *nyomó* feszültség, ha $F < 0$ és a rúd hossza csökken (azaz $\Delta\ell < 0$). Az ilyen feszültség tehát negatív, és értéke a p nyomás (-1)-szerese: $T = -p$. Egy homogén, ϱ sűrűségű rúdban a longitudinális hullámok terjedési sebessége (azaz a hangsebesség) a következő képlettel adható meg:

$$u = \sqrt{\frac{Y}{\varrho}}. \tag{2}$$

(A feladat megoldása során minden csillapítás és elnyelődés elhanyagolható.)

A. *Mechanikai tulajdonságok*

Egy homogén, egyik irányban végtelen rúd (kiterjedése $x = 0$-tól ∞-ig tart), sűrűsége ϱ. A rúd kezdetben nyugalomban van és feszültségmentes. A rúd bal felületére az $x = 0$ helyen egy nagyon rövid Δt ideig állandó, kicsiny p nyomás hat, és ezzel elindít egy u sebességgel jobbra haladó nyomáshullámot (*4. ábra*).

4. ábra

4. ábra

a) Mekkora ez alatt a Δt idő alatt az S deformáció és a p nyomás a rúd bal oldali felületénél, ha a dugattyú a rúd bal oldali felületét állandó v sebességgel mozgatja (*4. ábra*)? A választ ϱ, u és v függvényében kell megadni (*1,6 pont*)!

5. ábra

5. ábra

b) Tekintsünk egy longitudinális hullámot, amely x irányban terjed a rúdban! Jelöljük a rúd feszültségmentes állapotában x helyen levő keresztmetszetének t időpontbeli elmozdulását $\xi(x,t)$-vel (*5. ábra*), és tételezzük fel, hogy

(3) $$\xi(x,t) = \xi_0 \sin k(x - ut),$$

ahol ξ_0 és k állandók. Határozd meg a megfelelő $v(x,t)$ sebességet, $S(x,t)$ deformációt és $p(x,t)$ nyomást x és t függvényében (*2,4 pont*)!

B. *Elektromechanikai tulajdonságok (beleértve a piezoelektromos hatást)*

Tekintsünk egy hasáb alakú kvarckristályt, amelynek hossza b, vastagsága h és szélessége w (*6. ábra*)! A hossza x tengely irányú, vastagsága pedig z tengely irányú. Az alsó és a felső felületén vékony fémbevonat segítségével elektromos kontaktusokat alakítottak ki. Az elektromos vezetékek, amelyek egyben tartószerkezetként is szolgálnak (*7. ábra*) a kontaktusok közepére vannak forrasztva, ezért az x irányú longitudinális rezgések során ezek a pontok nyugalomban kell maradjanak.

6. ábra

6. ábra

7. ábra

A vizsgált kvarckristály sűrűsége $\varrho = 2{,}65 \cdot 10^3$ kg/m^3, Young-modulusa pedig $Y = 7{,}87 \cdot 10^{10}$ N/m^2. A hasáb hossza $b = 1{,}00$ cm, a w szélességre és a h vastagságra pedig $h \ll w \ll b$ teljesül. A K kapcsoló nyitva van, és feltételezzük, hogy csak x irányú longitudinális módusú állóhullámok gerjesztődnek a kvarc hasábban.

Egy $f = \omega/(2\pi)$ frekvenciájú állóhullámban a $\xi(x,t)$ elmozdulás a következő alakba írható:

(4a)
$$\xi(x,t) = 2\xi_0\, g(x) \cos \omega t, \qquad (0 \le x \le b),$$

ahol ξ_0 egy pozitív konstans, a $g(x)$ helyfüggő tényező

$$g(x) = B_1 \sin k\left(x - \frac{b}{2}\right) + B_2 \cos k\left(x - \frac{b}{2}\right) \tag{4b}$$

alakú, $g(x)$ maximális értéke 1 és $k = \omega/u$. Ne felejtsd el, hogy az elektromos kontaktusok közepe nyugalomban van, és hogy a hasáb bal és jobb vége szabad, a mechanikai feszültség (vagy a nyomás) értéke ezeken a helyeken nulla kell legyen!

c) Határozd meg a (4*b*) képletben szereplő B_1 és B_2 állandók értékét, ha a kvarc hasábban egy longitudinális állóhullám alakul ki (*1,2 pont*)!

d) Mekkora az a két legkisebb frekvencia, amelyen longitudinális állóhullám gerjeszthető a kvarc hasábban (*1,2 pont*)?

A *piezoelektromos hatás* a kvarckristály speciális tulajdonsága. A kristály összenyomása vagy megnyújtása elektromos feszültséget hoz létre a kristályban, és fordítva, a kristályra kapcsolt külső elektromos feszültség vagy megnyúlást, vagy összehúzódást okoz, a polaritástól függően. Így a mechanikai és az elektromos rezgések csatolódhatnak és rezonálhatnak a kvarckristályban.

Legyen a felső és az alsó elektromos kontaktus elektromos töltéssűrűsége $-\sigma$, illetve $+\sigma$, ha a kvarc hasábban E nagyságú, z irányú elektromos tér van! Jelölje a hasáb x irányú deformációját és mechanikai feszültségét S, illetve T! Ekkor a piezoelektromos hatás a kvarckristályban a következő egyenletrendszerrel írható le:

$$S = (1/Y)T + d_p E, \tag{5a}$$

$$\sigma = d_p T + \varepsilon_T E, \tag{5b}$$

ahol $1/Y = 1{,}27 \cdot 10^{-11}$ m^2/N a Young-modulus reciproka állandó elektromos tér esetén, $\varepsilon_T = 4{,}06 \cdot 10^{-11}$ F/m a dielektromos állandó konstans mechanikai feszültség esetén, $d_p = 2{,}25 \cdot 10^{-12}$ m/V pedig a piezoelektromos együttható.

Legyen most a *6. ábrán* látható K kapcsoló zárva! Ekkor $U(t) = U_\mathrm{m} \cos \omega t$ elektromos váltófeszültség jelenik meg a kontaktusokon, és a kvarc hasábban homogén, $E(t) = U(t)/h$ nagyságú, z irányú elektromos tér keletkezik. Az állandósult állapot kialakulása után a hasábban egy x irányú, ω körfrekvenciájú longitudinális állóhullám figyelhető meg.

Mivel E homogén, a λ hullámhossz és a hasábban lévő állóhullámok f frekvenciája között továbbra is érvényes a $\lambda = u/f$ összefüggés, ahol u értékét a (2) egyenlet adja meg. A $T = YS$ összefüggés azonban most már nem érvényes, mint ahogy azt az (5*a*) egyenlet is mutatja. Ugyanakkor a deformáció és a mechanikai feszültség definíciója változatlan, a hasáb végei pedig továbbra is szabadok, nulla mechanikai feszültséggel.

e) Az (5*a*) és az (5*b*) egyenletek figyelembevételével a σ felületi töltéssűrűség az alsó elektromos kontaktuson x és t függvényében

$$\sigma(x,t) = \left[D_1 \cos k\left(x - \frac{b}{2}\right) + D_2\right] \frac{U(t)}{h}$$

alakú lesz, ahol $k = \omega/u$. Vezesd le a fenti D_1 és D_2 mennyiségeket megadó összefüggéseket (*2,2 pont*)!

f) Az alsó kontaktuson lévő teljes $Q(t)$ elektromos töltés az $U(t)$ feszültségtől a

$$Q(t) = \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{2}{kb} \operatorname{tg} \frac{kb}{2} - 1\right)\right] C_0\, U(t).$$

képlet szerint függ. Vezesd le a kifejezésben szereplő C_0 és α^2 mennyiségeket megadó összefüggéseket, valamint α^2 numerikus értékét (*1,4 pont*)!