

Legyenek  $p$  és  $q$  olyan pozitív valós számok, amelyek reciprokaiknak összege 1. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{q(q+1)} < \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \frac{1}{p(p-1)} + \frac{1}{q(q-1)} \geq 1.$$