Legyen $g(x)$ egy kívánt tulajdonságú polinom a feladatbeli n számhoz. Létezik tehát olyan a egész, melyre $g(a) = 2004$. Definiáljuk a $g_1(x) := g(x+a)$ polinomot. Nyilván $g_1(0) = g(a) = 2004$, azaz $g_1(x)$ konstans tagja 2004, továbbá a $g_1(x) = n$ egyenletnek léteznek különböző, $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$ egész gyökei, melyek egyike sem 0, mivel $g_1(0) = 2004$. Ez azt jelenti, hogy

$$g_1(x) - n = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{2004}) \cdot g_2(x),$$

ahol a polinomosztás miatt a $g_2(x)$ polinom is egész együtthatós, konstans tagja legyen c. Az egyenlőségben szereplő két polinom konstans tagjai megegyeznek, így persze

$$|2004 - n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \ldots \cdot |a_{2004}| \cdot |c|,$$

ahonnan, felhasználva, hogy $c \neq 0$, kapjuk, hogy

$$|2004 - n| \geq |a_1| \cdot |a_2| \cdot \ldots \cdot |a_{2004}| \geq |1| \cdot |-1| \cdot |2| \cdot |-2| \cdot \ldots \cdot |1002| \cdot |-1002|.$$

Innen látszik, hogy $0 < n < 2004$ nem lehetséges, ezért a fenti egyenlőtlenségből $n \geq (1002!)^2 + 2004$ következik.

Legyen most a $g(x)$ polinom a következő:

$$g(x) := -(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) \ldots (x-1002)(x+1002) + (1002!)^2 + 2004.$$

Erre a polinomra $g(0) = 2004$ és

$$g(\pm k) = (1002!)^2 + 2004$$

minden $1 \leq k \leq 1002$ egészre, vagyis a feladat kérdésére a válasz

$$n = (1002!)^2 + 2004. \quad \square$$