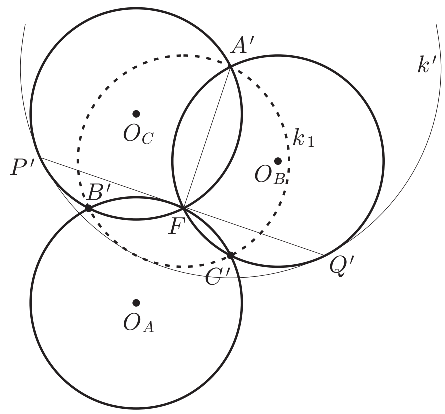
I. megoldás. Alkalmazzunk inverziót az A-val szemközti hozzáírt körre, melynek középpontját F jelöli. Az ABC háromszög oldalai (mivel érintik e kört) mind azonos sugarú körökbe transzformálódnak. Feltehetjük, hogy ez a sugár egységnyi, és a megfelelő körök középpontjai O_A, O_B és O_C. Az ABC körülírt körének a képe az A', B' és C' pontokon átmenő k_1 kör lesz. (A vesszős változat az adott pont inverzió utáni képet jelöli.)

Azt állítjuk, hogy a k_1 kör szintén egyégnyi sugarú. O_A, O_B és O_C ugyanis egyaránt egységnyi távolságra vannak az F-től, így a rajtuk átmenő kör sugara is egységnyi. Az $O_AO_BO_C$ háromszög oldalfelezőpontjai által meghatározott háromszög körülírt körének sugara tehát $\frac{1}{2}$. E háromszög csúcsai az FA', FB' és FC' szakaszok felezőpontjai, tehát az említett $\frac{1}{2}$ sugarú kört egy F közepű 2-szeres nagyítás a k_1-be viszi, mely így csakugyan egységsugarú.



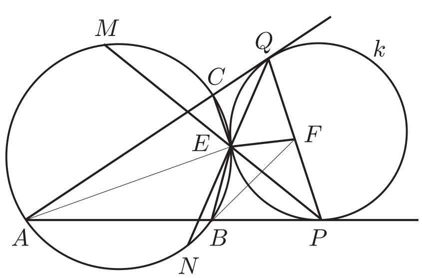
Az A' körüli 2 egység sugarú kör belülről érinti az AB, ill. AC oldalak képeit és a körülírt kör képét is, így e kör éppen k képe lesz az inverzió során. A P', Q' pontok pedig az A'-vel átellenes pontok a megfelelő egyégsugarú körökön, ezért $A'FP'$ és $A'FQ'$ egyaránt derékszögek, továbbá F (a szimmetria miatt) felezi $P'Q'$-t. Mivel F volt az inverzió középpontja, F egyúttal a PQ szakaszt is felezi. $\square$

Megjegyzések. 1. Hasonlóan a tavalyi verseny első feladatához, idén sem volt haszontalan a síkbeli inverzió tulajdonságainak ismerete (jóllehet tavaly többen próbálkoztak az alkalmazásával). A versenybizottság fenntartja magának az inverzióval (is) megoldható példa kitűzésének jogát.

2. A feladat szoros rokonságot mutat az 1978. évi Nemzetközi Matematikai Diákolimpián kitűzött 4. feladattal. A különbség lényegében annyi, hogy az olimpiai feladatban a k kör *belülről* érintett, és az érintési pontok alkotta szakasz felezőpontja a *beírt* kör középpontja volt. Az említett feladatra megjelent[1] egyik szellemes megoldás ötlete könnyen alkalmazható a mi esetünkre is. Ezt vázoljuk az alábbiakban.

3. Több versenyző próbálkozott az analitikus módszerrel. Természetesen így is teljes értékű megoldás kapható, azonban viszonylag kevesen jártak sikerrel.

II. megoldás. Legyen E a k kör és az ABC háromszög körülírt körének érintési pontja, M, ill. N pedig a PE, ill. QE egyeneseknek és a háromszög körülírt körének E-től különböző metszéspontja. Mivel E-ből a k kört egy középpontos hasonlóság viszi az ABC háromszög körülírt körébe, az M-ben, ill. N-ben a körülírt körhöz húzott érintők párhuzamosak AB-vel, ill. AC-vel. Eszerint M felezi a C-t tartalmazó AB ívet, N pedig felezi a B-t tartalmazó AC ívet.



Felhasználva a kerületi szögek egyenlőségét, illetve hogy feleakkora ívhez feleakkora kerületi szög tartozik

$$MEB\sphericalangle = MEA\sphericalangle + AEB\sphericalangle = \frac{\beta+\alpha}{2} + \gamma = \frac{\pi+\gamma}{2}$$

[1]ld. Reiman – Dobos: *Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák* 1959–2003 (328–332. oldal)

adódik, ahonnan

$$BEP\sphericalangle = \pi - MEB\sphericalangle = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

(Felhasználtuk, hogy $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.)

Világos, hogy $ABEC$ húrnégyszög, így a konkáv $BEC\sphericalangle$ nagysága $\pi+\alpha$. Legyen F az iménti szög felezőjének és a PQ szakasznak a metszéspontja. Eszerint

$$BEF\sphericalangle = \frac{\pi+\alpha}{2}, \qquad \text{és} \qquad APF\sphericalangle = \frac{\pi-\alpha}{2},$$

hiszen az AQP háromszög egyenlő szárú. Azt kaptuk, hogy $FEBP$ húrnégyszög, melyben a PF íven nyugvó kerületi szögre

$$PBF\sphericalangle = PEF\sphericalangle = BEF\sphericalangle - BEP\sphericalangle = \frac{\pi+\alpha}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi-\beta}{2}.$$

Az adódott tehát, hogy BF az ABC háromszög B-nél lévő külső szögének a felezője.

A fenti számolás értelemszerű módosításával adódik, hogy CF az ABC háromszög C-nél levő külső szögfelezője. A két külső szögfelező F metszéspontja egyfelől a BC oldalhoz hozzáírt kör középpontja, másfelől rajta van az ABC háromszög A-ból induló szögfelezőjén. E szögfelező azonban felezi az egyenlő szárú APQ háromszög alapját, az állítást igazoltuk. $\square$