Jelölje ezt az $n$ eseményt $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ekkor $1 \le i \le n$ esetén $P(A_i) = \dfrac{1}{2}$, továbbá $1 \le i < j \le n$ esetén $P(A_i \cap A_j) = \dfrac{1}{4}$ teljesül. Legyenek $B_1, \ldots, B_k$ olyan páronként diszjunkt események, melyek közül alkalmasak uniójaként mindegyik $A_i$ előállítható, és azt is tegyük fel, hogy mindegyik $B_j$ szerepel legalább az egyik $A_i$ előállításában. (Ilyenek például az $A'_1 \cap \ldots \cap A'_n$ alakban előálló események, ahol $A'_i$ vagy az $A_i$ eseményt, vagy annak komplementerét jelöli, és legalább egy $i$-re $A'_i = A_i$ teljesül.) Definiáljunk minden $1 \le i \le n$ esetén egy $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik})$ vektort, ahol $a_{ij} = 1$, amennyiben $B_j$ szerepel $A_i$ előállításában (vagyis $B_j \subseteq A_i$), különben pedig $a_{ij} = 0$. Legyen $1 \le j \le k$ esetén $P(B_j) = p_j$. Ekkor annak valószínűsége, hogy az $A_1, \ldots, A_n$ események közül legalább az egyik bekövetkezik: $p = p_1 + \cdots + p_k$.

Tekintsük a következő mennyiséget:

$$S := p_1(a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{n1})^2 + \cdots + p_k(a_{1k} + a_{2k} + \cdots + a_{nk})^2.$$

Könnyen meggondolhatjuk, hogy

$$S = P(A_1) + \cdots + P(A_n) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) = \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{4} = \frac{n(n+1)}{4}.$$

Most a súlyozott számtani és négyzetes közepek közti egyenlőtlenség segítségével alulról becsüljük $S$ értékét:

$$\sqrt{\frac{S}{p}} \ge \frac{p_1(a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{n1}) + \cdots + p_k(a_{1k} + a_{2k} + \cdots + a_{nk})}{p} =$$
$$= \frac{P(A_1) + \cdots + P(A_n)}{p} = \frac{n}{2p},$$

amiből $\dfrac{n(n+1)}{4} = S \ge \dfrac{n^2}{4p}$, és így $p \ge \dfrac{n}{n+1}$.

Ez azt jelenti, hogy annak a valószínűsége, hogy az $A_1, \ldots, A_n$ események közül egyik sem következik be, legfeljebb $\dfrac{1}{n+1}$.

A feladat ($b$) részének igazolásához legyen $n = 2^t - 1$, ahol $t$ tetszőleges pozitív egész szám. Dobjunk $t$-szer egy szabályos pénzérmével, és a dobások halmazának tetszőleges nemüres $H$ részhalmazára legyen $A_H$ az az esemény, hogy a $H$-beli dobások között páratlan sok fej van. Megmutatjuk, hogy ez az $n$ esemény kielégíti a feltételeket. Legyen először $H$ a dobások halmazának egy nemüres részhalmaza, és legyen $h \in H$. Képzeljük úgy, hogy a $h$ dobás történik utoljára. Ha a $H \setminus \{h\}$-beli dobások közül páratlan sok lett fej, akkor $\dfrac{1}{2}$ valószínűséggel lesz a $H$-beli dobások közül is páratlan sok fej (ha a $h$ dobás írás), ha pedig a $H \setminus \{h\}$-beli dobások közül páros sok lett fej, akkor szintén $\dfrac{1}{2}$ valószínűséggel lesz a $H$-beli dobások között páratlan sok fej (ha a $h$ dobás fej). Ezért $P(A_H) = \dfrac{1}{2}$. Legyenek most $H_1$ és $H_2$ a dobások halmazának különböző nemüres részhalmazai. Feltehetjük, hogy például $H_1 \not\subseteq H_2$, vagyis létezik $h_1 \in H_1 \setminus H_2$. Legyen $h_2 \in H_2$. Képzeljük úgy, hogy a $h_1$ dobás az utolsó, a $h_2$ pedig az utolsó előtti. Akármi is a $h_1$, $h_2$ előtti dobások eredménye, a $h_2$ dobás után $\dfrac{1}{2}$ valószínűséggel lesz a $H_2$-beli dobások között páratlan sok fej, és a $H_2$-beli fejek számán a $h_1$ dobás már nem változtat. A $h_1$ előtti dobások eredményétől függetlenül, az utolsó, $h_1$ dobás után pedig $\dfrac{1}{2}$ valószínűséggel lesz a $H_1$-beli fejek száma páratlan. Ez azt jelenti, hogy $P(H_1 \cap H_2) = \dfrac{1}{4}$. Az $A_H$ események közül akkor nem következik be egyik sem, ha az összes dobás eredménye írás, ennek a valószínűsége pedig $\dfrac{1}{2^t} = \dfrac{1}{n+1}$. Ezzel a feladat ($b$) részét is igazoltuk.

*Megjegyzés.* Tetszőleges páratlan $n$-re megadható $n$ olyan esemény, amelyek teljesítik a feladatbeli feltételeket úgy, hogy pontosan $\dfrac{1}{n+1}$ valószínűséggel nem következik be egyik sem. Legyen ugyanis $n = 2k+1$, és tegyük fel, hogy az eseményeink közül mindig pontosan $k+1$ következik be, ráadásul bárhogyan is választunk ki $k+1$ eseményt, azok együttes bekövetkezésének valószínűsége pontosan $p = \dfrac{k! \cdot k!}{2 \cdot (2k)!}$. Ekkor az $A_i$ esemény bekövetkezésének a valószínűsége

$$P(A_i) = \binom{2k}{k} \cdot p = \frac{(2k)! \cdot k! \cdot k!}{k! \cdot k! \cdot 2 \cdot (2k)!} = \frac{1}{2},$$

illetve az $A_i$ és $A_j$ események együttes bekövetkezésének valószínűsége $i \ne j$ esetén

$$P(A_i \cap A_j) \binom{2k-1}{k-1} \cdot p = \frac{(2k-1)! \cdot k! \cdot k!}{(k-1)! \cdot k! \cdot 2 \cdot (2k)!} = \frac{k}{2 \cdot 2k} = \frac{1}{4}.$$

Annak a valószínűsége pedig, hogy egyik esemény sem következik be éppen

$$1-\binom{2k+1}{k+1}\cdot p=1-\frac{(2k+1)!\cdot k!\cdot k!}{(k+1)!\cdot k!\cdot 2\cdot(2k)!}=1-\frac{2k+1}{2\cdot(k+1)}=$$

$$=1-\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{1}{2k+2}=\frac{1}{n+1}.$$