(a) Indirekt bizonyítunk: tegyük fel, hogy létezik 5 egymást követő, érdekes pozitív egész szám. Ezen számok közt bizonyosan van két olyan egymást követő szám (mondjuk n és $n+1$), hogy az n szám 2-es számrendszerbeli felírása 01-re végződik: $n = \dots 01_2$. Ekkor az $(n+1) = \dots 10_2$, ezért $E(n) = E(n+1)$. Mivel n és $n+1$ egyaránt érdekesek, $E(n) \mid n$ és $E(n) = E(n+1) \mid n+1$ miatt $E(n) \mid (n+1) - n = 1$ teljesül, tehát $E(n) = 1$. Ezért $n = \dots 01_2$-ből $n = 1$ következik. Ekkor ugyan $n + 1 = 2$ még érdekes, de $n + 2 = 3$ már nem az, tehát nem létezik 5 egymást követő érdekes pozitív egész szám. (Negatív számokat is megengedve létezik öt egymást követő érdekes szám: $-2, -1, 0, 1, 2$.) Egyúttal azt is igazoltuk, hogy ha az n, $n+1$, $n+2$ és $n+3$ pozitív egészek mindegyike érdekes, akkor az $n = \dots 10_2$.

(b) A fenti bizonyításból kitűnik, hogy ha olyan n-t keresünk, amire az n, $n+1$ és $n+2$ számok mindegyike érdekes, akkor $n+2 = \dots 00_2$ vagy $n+2 = \dots 01_2$. Foglalkozzunk azzal az esettel, amikor $n+2 = \dots 00_2$. Sőt: tegyük fel, hogy

$$n + 2 = \dots 10000_2,$$

azaz $n+2$ osztható 16-tal, de 32-vel nem.

Legyen $a := E(n+2)$. Ekkor $n+1 = \dots 01111_2$ és $n = \dots 01110_2$, tehát $E(n+1) = a+3$, $E(n) = a+2$, így $a+2 \mid n$ és $a+3 \mid n+1$, valamint $a \mid n+2$. Ezért olyan (minél kisebb) a-t keresünk, amire az a, $a+2$ és $a+3$ számok közül legfeljebb csak a-nak és $(a+2)$-nek lehet 1-nél nagyobb közös osztója, és az sem lehet több 2-nél. Éppenséggel az $a = 2$ ilyen szám, ahhoz azonban, hogy ez megoldást adjon, az kellene, hogy $a + 2 = 4 \mid n$ teljesüljön, ahol $n+2 = 10\dots 010000_2$. Ez pedig lehetetlen, ugyanis $n = \dots 10_2$. Ezért a következő lehetőséggel, $a = 4$-gyel próbálkozunk. Ekkor $n+2 = 2^{t_1} + 2^{t_2} + 2^{t_3} + 2^4$, ahol $t_1 > t_2 > t_3 > 4$. Az n és $n+1$ érdekességéből adódnak a $E(n) = 6 \mid n$ és $E(n+1) = 7 \mid n+1$ feltételek.

Az $x := n + 2 - 16 = n - 14 = 2^{t_1} + 2^{t_2} + 2^{t_3}$ jelölést bevezetve azt kapjuk, hogy $x \equiv 6 \pmod 7$, $x \equiv 4 \pmod 6$ teljesül, és $t_3 > 4$ miatt $x \equiv 0 \pmod{32}$. Ennek a kongruenciarendszernek kell tehát olyan $x = 2^{t_1} + 2^{t_2} + 2^{t_3}$ alakú megoldását kereснünk, amelyre $t_1 > t_2 > t_3 > 4$. Nem nehéz megoldani a szimultán kongruenciarendszert sem (az $x \equiv 4 \pmod 6$ helyett $x \equiv 1 \pmod 3$ kongruenciát használva), de az ujjainkon számolva is célt érünk. A két első kongruencia az $x \equiv 34 \pmod{42}$ kongruenciával ekvivalens. A $t_3 > 4$ feltétel azt jelenti, hogy $2^5 \mid x$, tehát az $x = 34 + 42k$ alakú számok közül csak 160, $160 + 42 \cdot 16 = 832$, $\dots$ jön szóba. A $160 = 10100000_2$ még nem jó, de a $832 = 1101000000_2$ már igen. Tehát $n + 2 = 2^9 + 2^8 + 2^6 + 2^4 = 848$ és valóban: az $n = 846 = 1101001110_2$ választással $E(846) = 6 \mid 846$, $E(847) = 7 \mid 847$ és $E(848) = 4 \mid 848$.

A most talált érdekes számhármas segítségével pedig úgy kaphatunk végtelen sok megoldást, ha észrevesszük, hogy $3 \mid 2^6 - 1$ és $7 \mid 2^6 - 1$, tehát

$$m(j) = 2^{9+6j} + 2^{8+6j} + 2^{6+6j} + 2^4$$

választással

$$E\big(m(j) - 1\big) = 7 \mid m(j) - 1 = \big(2^{6j} - 1\big) \cdot 832 + 847$$

és

$$E\big(m(j) - 2\big) = 6 \mid m(j) - 2 = \big(2^{6j} - 1\big) \cdot 832 + 846.$$

(Az $E\big(m(j)\big) = 4 \mid m(j)$ pedig nyilván teljesül.)

Megjegyzések. 1. A (b) rész megoldásához nem tartozik hozzá, hogyan is találtuk meg a végtelen sok példát. Természetesen az is teljes értékű megoldás, ha valaki csak az utolsó bekezdésben megadott számhármasokra bizonyítja be, hogy azok érdekes számokból állnak. (Utóbbit nem nehéz megtenni). Természetesen a mintamegoldásban egyúttal azt is jelezni kívántuk, hogyan lehet találni ilyen számhármasokat.

2. A (b) rész megoldásának elején miért csak azt vizsgáltuk, ha $n + 2$ bináris alakjában a két utolsó 0 előtt még két 0 áll? Nos azért, mert ha $n + 2 = \dots 100_2$ lenne, akkor $n + 1 = \dots 011_2$ és $n = \dots 010_2$, vagyis $E(n) = E(n+2) \mid (n+2) - n = 2$, tehát $n + 2 = 2^t + 4$ és $3 \mid n + 1 = 2^t + 3$, ami lehetetlen.

Hasonlóan, ha $n + 2 = \dots 1000_2$, akkor $n + 1 = \dots 0111_2$, $n = \dots 0010_2$, így $a = E(m)$ jelöléssel $E(n+1) = a + 2$ és $E(n) = a + 1$-nek adódik, ám ez a mintamegoldásbelinél nagyobb a-ra vezet. (Egyébként van ilyen megoldás is, ezek legkisebbike $n + 2 = 2360 = 2^{11} + 2^8 + 2^5 + 2^4 + 2^3$, ahol tehát $a = 4$ és $6 \mid 2358 = 100100110110_2$, $7 \mid 2359 = 100100110111_2$ és $5 \mid 2360 = 100100111000_2$.)

3. Ha a (b) részben az n-et $n = \dots 11_2$ alakban keresnénk, akkor hasonló gondolatmenettel még kisebb megoldást is találnánk: $n = 623$-ra $7 \mid 623 = 1001101111_2$, $4 \mid 624 = 1001110000_2$ és $5 \mid 625 = 1001110001_2$. Innen pedig $7 \mid 2^{12} - 1$ és $5 \mid 2^{12} - 1$ miatt kapunk végtelen sok $\big(m(j) - 1, m(j), m(j) + 1\big)$ érdekes hármast, ahol $m(j) = 2^{9+12j} + 2^{6+12j} + 2^{5+12j} + 2^4$.

4. A feladat (a) részét kiegészítő természetes kérdés persze úgy hangzik, hogy a pozitív egészek között előfordul-e vajon végtelen sokszor négy egymást követő érdekes szám. A válasz igenlő: a legkisebb ilyen négyes a

$$6 \mid 6222 = 1100001001110_2, \qquad 7 \mid 6223 = 1100001001111_2,$$
$$4 \mid 6224 = 1100001010000_2 \quad \text{és} \quad 5 \mid 6225 = 1100001010000_2.$$

Innen a fentiekhez hasonlóan kaphatunk végtelen sok $m(j) - 2$, $m(j) - 1$, $m(j)$, $m(j) + 1$ érdekes számnégyest, ahol $m(j) = 2^{12+12j} + 2^{11+12j} + 2^{6+12j} + 2^4$. A 6222 szám megtalálása pontosan ugyanolyan lépésekkel történhet, mint a 846 vagy a 623 számoké, csak valamivel több számolást (és így több időt) igényel, további említést érdemlő ötletre azonban nincs szükség. Ez hát a magyarázata annak, hogy a bizottság a feladat (b) részében a természetesen adódónál egy könnyebb kérdést tűzött ki.

5. A (b) részben használt ötletek nélkül is nagyon könnyen látható, hogy végtelen sok olyan n van, amire n és $n+1$ is érdekes. Ugyanis minden $n=2^t+4$ jó, ahol $t>2$ páros, hiszen $E\big(2^t+4\big)=2 \mid 2^t+4$ és $E\big(2^t+5\big)=3 \mid 2^t+5$. Vannak példák páratlan n-nel is, a legkisebb az $n=115=1110011_2$.

6. Az b alapú számrendszerben a feladatbelihez hasonlóan definiált számokat a szakirodalom b-Niven számokként említi. A 10-Niven számokat röviden Niven-számoknak (vagy Harshad-számoknak) hívják. Helen Grundman publikálta 1994-ben, hogy legfeljebb $2b$ egymást követő b-Niven szám létezhet, és Cai bizonyította 1996-ban, hogy végtelen sokféleképp található 4 egymást követő 2-Niven szám, illetve hogy a 3-Niven számok között is végtelen sok egymást követő hatos lép fel. Tudható még, hogy az egymást követő nem-Niven számok sorozata tetszőlegesen hosszú lehet, illetve hogy hány (10-)Niven szám van x-ig (DeKoninck–Doyon tétele szerint aszimptotikusan $c\dfrac{x}{\log x}$, ahol $c=\dfrac{14}{27}\log 10\approx 1{,}1939$).