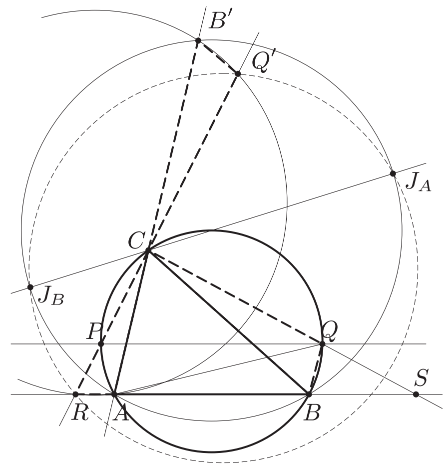
Megoldás (Gyarmati Máté megoldása alapján).

A $BCQ\sphericalangle$ és $BAQ\sphericalangle$ azonos íven nyugvó kerületi szögek, $BAQ\sphericalangle$ és $PQA\sphericalangle$ váltószögek, valamint $PQA\sphericalangle$ és $PCA\sphericalangle$ szintén azonos íven nyugvó kerületi szögek.



Innen

$$BCQ\sphericalangle = BAQ\sphericalangle = PQA\sphericalangle = PCA\sphericalangle$$

adódik. Ezen kívül $RAC\sphericalangle = BQC\sphericalangle$, hiszen $ABQC$ húrnégyszög. Tehát $RAC\triangle \sim BQC\triangle$, hisz két-két szögük egyforma, így $CRA\sphericalangle = CBQ\sphericalangle$ is teljesül.

Legyenek B' és Q' rendre a B, illetve Q pontok tükörképei a J_AJ_B egyenesre. Világos, hogy

$$J_BAJ_A\sphericalangle = J_BAC\sphericalangle + CAJ_A\sphericalangle = \frac{1}{2}(RAC\sphericalangle + CAB\sphericalangle) = \frac{1}{2}\cdot 180^\circ = 90^\circ$$

és hasonlóan

$$J_BBJ_A\sphericalangle = J_BBC\sphericalangle + CBJ_A\sphericalangle = \frac{1}{2}(ABC\sphericalangle + CBS\sphericalangle) = \frac{1}{2}\cdot 180^\circ = 90^\circ,$$

ahol S a CQ és AB metszéspontja. A tükrözés miatt tehát J_A, A, B, J_B és B' egy körön (J_AJ_B Thalesz-körén) vannak. Ezen kívül J_B és J_A egyaránt rajta vannak az ABC háromszög C-nél lévő külső szögfelezőjén, ezért a B csúcs B' tükörképe az AC egyenesre illeszkedik. Korábban láttuk, illetve a tükrözés miatt $RCA\sphericalangle = QCB\sphericalangle = Q'CB'\sphericalangle$, így R, C és Q' is egy egyenesre esnek. Ezek szerint

$$RAB'\sphericalangle = RAC\sphericalangle = BQC\sphericalangle = B'Q'C\sphericalangle = B'Q'R\sphericalangle,$$

tehát az R, A, Q' és B' pontok is húrnégyszöget alkotnak.

A J_BABB' és $RAQ'B'$ körök hatványvonala AB', a J_BABB' és J_BRJ_A körök hatványvonala pedig J_AJ_B. E három kör hatványpontja pedig a két hatványvonal metszéspontja, C. Tehát a C pont hatványa az $RAQ'B'$ körre $|\overline{CR}|\cdot|\overline{CQ'}|$, és ez megegyezik a J_ARJ_B körre vett hatvánnyal. Mivel R az utóbbi körön fekszik, Q'-nek is illeszkednie kell e körre, tehát J_ARJ_BQ' húrnégyszög. Innen

$$180^\circ = J_ARJ_B\sphericalangle + J_AQ'J_B\sphericalangle = J_ARJ_B\sphericalangle + J_AQJ_B\sphericalangle,$$

és nekünk pontosan ezt kellett igazolnunk.

Megjegyzés. A feladat állítása akkor is teljesül, ha a PQ húrról nem tesszük fel, hogy metszi az AC és BC oldalszakaszokat. Ez az általánosítás több, egymástól lényegesen nem különböző eset gondos vizsgálatával a fentiekhez hasonlóan igazolható. A bizottság nem kívánta ezzel terhelni a versenyzőket, ezért döntött a speciális eset kitűzése mellett.