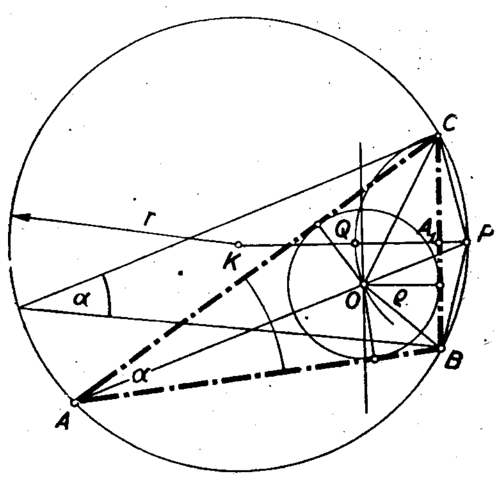
A feladat azonos az 1952. évi Arany Dániel verseny II. forduló 3. feladatával, azzal az egyszerűsítéssel, hogy a körülírt kör sugara helyett közvetlenül meg van adva az adott szöggel szemben fekvő oldal. Megoldása a 2. szám 39–41. oldalán megtalálható.

I. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak. Legyen az adott szög α a háromszög köré írt kör középpontja K és sugara r, beírt kör középpontja O és sugara ϱ. (1. ábra).



1. ábra

A $BOC\triangle$-ből $BOC\sphericalangle = 180^\circ - \dfrac{\beta}{2} - \dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{360^\circ - (\beta+\gamma)}{2} = \dfrac{180^\circ + \left[180^\circ - (\beta+\gamma)\right]}{2} = \dfrac{180^\circ + \alpha}{2} = 90^\circ + \dfrac{\gamma}{2}$.
A kerületi szögek tétele alapján a K középpontú és r sugarú körben tetszőleges a kerületi szög szárainak a körrel való metszéspontjai megadják a háromszög $BC = a$ oldalát.

Az O pont – a fentiek szerint – rajta van azon a BC köríven, melynek pontjaiból a BC távolság $90 + \dfrac{\alpha}{2}$ szög alatt látszik és amely körív a BC oldalnak ugyanazon az oldalán van, mint az α szög csúcspontja. E látószög-kör középpontját P-vel jelölve, a központi és kerületi szög közötti összefüggés alapján

$$BPC\sphericalangle = 360^\circ - 2\left(90 + \frac{\alpha}{2}\right) = 180^\circ - \alpha, \tag{1}$$

vagyis az $ABPC$ négyszög húrnégyszög és így a P pont a BC ív felezőpontja.

Egy másik geometriai hely O-ra nézve a BC egyenestől ϱ távolságban a BC-vel párhuzamosan húzott egyenes, a BC egyenesnek ugyanazon az oldalán, mint az előbbi körív.

A két mértani hely egyik metszéspontja a keresett O pont. O körül ϱ sugárral rajzolt körhöz a B és C pontokból szerkesztett érintők metszéspontja A (amely rajta van a köré írt körön) a keresett háromszög harmadik csúcspontja. (Általában két pontot kapunk O számára, de mindkettő *egybevágó* háromszögekre vezet, tehát csak egy megoldásról beszélünk.)

Határozzuk meg a megoldhatóság feltételeit. Jelöljük az a oldal felezőpontját A_1-gyel és a PA_1 egyenesnek metszéspontját a látószög-körívvel, Q-val. Megoldás nyilván csak akkor van, ha $\varrho \leqq A_1Q$

Mivel (1) alapján az $A_1BP\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2}$, azért

$$A_1P = \frac{\mathbf{a}}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a\sin\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$$

és

$$PQ = PB = \frac{a}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$$

amiből

$$A_1Q = PQ - A_1P = \frac{a}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}} - \frac{a\sin\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{a\left(1-\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}.$$

De $\quad a = 2r\sin\alpha = 4r\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$

$$\text{és így}\quad A_1Q = 2r\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

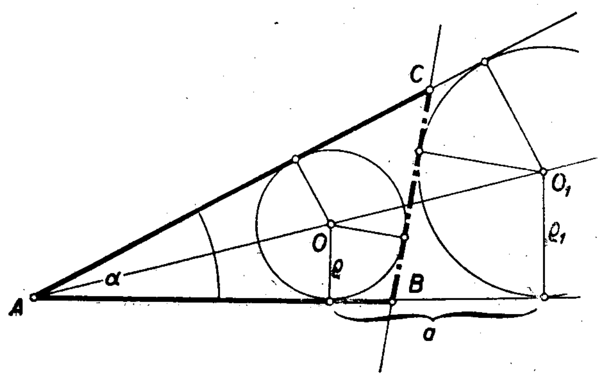
Tehát megoldás csak akkor van, ha

$$\varrho \leqq 2r\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

Egyenlőség esetén $\varrho = A_1Q$ és a háromszög egyenlő szárú ($b = c$).

Állandó r esetén a jobboldal akkor [maximális, ha $\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)$ maximális. Egy szorzat pedig, amelyben a tényezők *összege állandó*, akkor veszi fel a legnagyobb értéket, ha a tényezők egyenlők, vagyis $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, amiből $a = 60^\circ$ és $\varrho \leqq \frac{r}{2}\cdot\varrho$ maximális értéke tehát $\frac{r}{2}$ és ezt akkor veszi fel, ha $a = 60^\circ$ és azonkívül $\beta = \gamma = 60^\circ$, vagyis a háromszög egyenlő oldalú. L. »K. M. L« I. évf. 1948. május , 167. sz. feladat.)

II. megoldás: Felhasználjuk ezt a tételt (I. osztályos tankönyv 1950–es kiadás, 285. oldal), mely szerint egy háromszög beírt és hozzáírt körének egy-egy közös külső érintő oldalon lévő két érintési pontjának távolsága egyenlő a harmadik oldallal, amely a fenti két kör közős belső érintőjének a külső érintők közé eső szakasza.



2. ábra

Eszerint a szerkesztés menete: a $BC = a$ háromszög oldal szerkesztése ugyanúgy történik, mint az I.megoldásban. Felvesszük az α szöget és szerkesztünk egy ϱ sugarú, mindkét szárt érintő kört (2. ábra). Az egyik szögszáron az érintés: pontból kiindulva felmérjük – a szög csúcspontjától távolodó irányban – az a távolságot. Az így nyert pont lesz az említett tétel alapján a hozzáírt. kör érintési pontja. A beírt és hozzáírt kör egy közös belső érintője metszi ki az α szög száraiból a B és C csúcspontokat.

A megoldhatóság feltétele: a hozzáírt kör középpontját O_1-gyel és sugarát ϱ_1-gyel jelölve, feladatunk csak akkor oldható meg, ha $\varrho + \varrho_1 \leqq OO_1$. De

$$\varrho_1 = \varrho + a\ \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}, \qquad OO_1 = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

és így feltételünk

$$2\varrho + \frac{\mathrm{a}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \leqq \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

amiből $\varrho \leqq \dfrac{a\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 2r\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)$, ami megegyezik az I. megoldásból nyert feltétellel