

Eredményeinkből újabb függvények konvexitására tudunk következtetni, abból pedig racionális kitevőhöz tartozó hatványközepekre is ki fogjuk tudni terjeszteni eredményeinket. Az (5) egyenlőséget alakítjuk át hasonlóan, mint fentebb a (3)-mal tettük. Emeljük s -edikre mindkét oldalát, és írjunk x_1^t, x_2^t helyett y_1, y_2 -t. Mivel $s > 0$, kapjuk, hogy

$$\frac{y_1^{s/t} + y_2^{s/t}}{2} > \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^{s/t}; \quad \left(\frac{s}{t} > 1\right)$$

ez pedig azt fejezi ki, hogy a változó 1-nél nagyobb racionális kitevős hatványa is konvex függvény. Ha viszont t -edik hatványra emeltünk, és x_1^s, x_2^s helyett írunk z_1, z_2 -t, akkor a

$$\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)^{t/s} > \frac{z_1^{t/s} + z_2^{t/s}}{2} \quad \left(0 < \frac{t}{s} < 1\right)$$

egyenlőséghez jutunk, ami azt fejezi ki, hogy a változó 1-nél kisebb pozitív racionális hatványa konkáv.

Nézzük még meg a változó negatív racionális kitevős hatványait is. Legyen r pozitív racionális szám, akkor a számtani, mértani és harmónikus közép közti egyenlőség szerint

$$\left(\frac{x_1^{-r} + x_2^{-r}}{2}\right)^{-1} < \sqrt{x_1^r x_2^r} = (\sqrt{x_1 x_2})^r < \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^r.$$

Pozitív számokról lévén szó mindkét oldal reciprokát vehetjük:

$$\frac{x_1^{-r} + x_2^{-r}}{2} > \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^{-r},$$

tehát a változó negatív racionális kitevős hatványa mindig konvex.

Állításaink érvényesek minden valós kitevőre, az irracionálisakra is, ennek bizonyításához azonban ismét a folytonosság pontos fogalmára volna szükségünk, amire nem fogunk kitérni.

Az utolsó átalakításban másképpen is alkalmazhatjuk a számtani és mértani közép közti egyenlőséget:

$$\left(\frac{x_1^{-r} + x_2^{-r}}{2}\right)^{-1} < \sqrt{x_1^r x_2^r} < \frac{x_1^r + x_2^r}{2}$$

és innen $1/r$ -edikre emelve

$$\left(\frac{x_1^{-r} + x_2^{-r}}{2}\right)^{-1/r} < \sqrt{x_1 x_2} < \left(\frac{x_1^r + x_2^r}{2}\right)^{1/r}$$

Ez az egyenlőség azt mondja, hogy a mértani közép a $-r$ -edik és r -edik hatványközép közé esik, bármilyen racionális szám is r .

A hatványközepek közt talált egyenlőségeket mostmár azzal egészíthetjük ki, hogy bármelyik pozitív kitevős hatványközép nagyobb minden negatív kitevőhöz tartozó hatványközépnél, hiszen a mértani közép a kettő közé esik; s így két racionális kitevőhöz tartozó hatványközép közül a nagyobb kitevőhöz tartozó a nagyobb, függetlenül a kitevők előjelétől.