

Vizsgáljuk pl. a  $10^x$  függvényt.

$$10^{\frac{x_1+x_2}{2}} = \sqrt{10^{x_1}10^{x_2}} < \frac{10^{x_1} + 10^{x_2}}{2}$$

a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint.  $10^x$  tehát konvex függvény, de ugyanez igaz bármely 1-től különböző pozitív a szám hatványára is, mert egész hasonlóan

$$a^{\frac{x_1+x_2}{2}} = \sqrt{a^{x_1}a^{x_2}} < \frac{a^{x_1} + a^{x_2}}{2}.$$

A logaritmus függvényre, ha  $x_1$  és  $x_2$  pozitív,

$$\lg\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \lg(\sqrt{x_1x_2}) = \frac{\lg x_1 + \lg x_2}{2},$$

tehát a tízes alapú logaritmus konkáv függvény. Itt az első lépésben kihasználtuk azt is, hogy az  $\lg x$  függvény értéke csökken, ha  $x$  csökken. Ez csak 1-nél nagyobb alapszámú logaritmusra igaz, így ha  $a > 1$

$$\overset{a}{\log}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \overset{a}{\log}(\sqrt{x_1x_2}) = \frac{\overset{a}{\log}x_1 + \overset{a}{\log}x_2}{2},$$

ha viszont  $0 < a < 1$ , akkor

$$\overset{a}{\log}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \overset{a}{\log}(\sqrt{x_1x_2}) = \frac{\overset{a}{\log}x_1 + \overset{a}{\log}x_2}{2}.$$

A logaritmus függvény tehát 1-nél nagyobb alapszám esetén konkáv, 1-nél kisebb alapszám esetén viszont konvex.

A bebizonyított egyenlőtlenségek egyik következménye, hogy a  $\lg x$  függvényre teljesül a súlyozott Jensen-egyenlőtlenség tehát, ha  $x_1, x_2, q_1$  és  $q_2$  pozitív és  $q_1 + q_2 = 1$ , akkor

$$\lg(q_1x_1 + q_2x_2) > q_1\lg x_1 + q_2\lg x_2.$$

Miután  $10^x$  értéke csökkenő  $x$ -szel csökken, így ugyanilyen egyenlőtlenség áll azok közt a számok közt is, amiknek a bal-, ill. jobboldal a logaritmus:

$$q_1x_1 + q_2x_2 = 10^{\lg(q_1x_1 + q_2x_2)} > 10^{q_1\lg x_1 + q_2\lg x_2} = x_1^{q_1}x_2^{q_2}.$$

A baloldalon a két szám súlyozott számtani közepe áll, a jobboldalt nevezzük a súlyozott mértani középnek; (ha  $q_1 = q_2 = 1/2$ , akkor éppen a közönséges mértani közepet kapjuk). Azt kaptuk tehát, hogy két szám súlyozott számtani közepe nagyobb az ugyanazon súlyokkal súlyozott mértani középénél. Ha a többtagú súlyozott Jensen-egyenlőtlenséget írjuk fel, akkor ugyanígy kapjuk, hogy akárhány szám súlyozott számtani közepe mindig nagyobb az ugyanazokkal a súlyokkal súlyozott mértani középénél. Ezeket bizony nem volna könnyű a fenti tétel igénybevétele nélkül közvetlenül igazolni.

Ha a nyert egyenlőtlenséget az  $y_1 = 1/x_1, y_2 = 1/x_2$  számokra írjuk fel, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{q_1}{x_1} + \frac{q_2}{x_2} = q_1y_1 + q_2y_2 > y_1^{q_1}y_2^{q_2} = \left(\frac{1}{x_1}\right)^{q_1} \left(\frac{1}{x_2}\right)^{q_2},$$

vagyis

$$x_1^{q_1}x_2^{q_2} > \frac{1}{(q_1/x_1) + (q_2/x_2)}.$$

A jobboldali mennyiséget nevezzük súlyozott harmonikus középnek. A súlyozott mértani közép tehát a súlyozott számtani és a súlyozott harmonikus közép közé esik.