A geometriai szemlélet azt is mutatja, hogy elegendő azt tudni egy görbéről, hogy *minden* húr középpontja a görbe fölött van, már ebből is következtethetünk a görbe konvex voltára, vagyis az

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \tag{1}$$

kéttagú szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenség teljesítéséből már következik a súlyozott és a többtagú súlyozott Jensen-egyenlőtlenség teljesülése is. Ezt egyelőre csak a szemlélet alapján láttuk be. Nézzük most meg, mit tudunk bizonyítani anélkül, hogy a geometriai szemléletre hivatkoznánk.

Tegyük fel, hogy teljesül egy függvényre az (1) egyenlőtlenség. Ebből közvetlenül a négytagú hasonló egyenlőtlenségre következtethetünk.

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} = \frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2}$$

folytán ugyanis kétszer alkalmazva az (1) egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right) = f\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2}\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)}{2} \leqq \frac{\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\frac{f(x_3)+f(x_4)}{2}}{2} =$$

$$= \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}.$$

Meg kell engednünk az egyenlőség fennállását is, mert ha az x-ek közt vannak is különbözők, akkor is előfordulhatnak a kéttagú számtani közepek számlálóiban egyenlő számok is és így a megfelelő egyenlőtlenség helyébe egyenlőség lép. Nem fordulhat elő azonban mindegyik törtben ez az eset, és így az első és utolsó kifejezés közt mindig a $<$ jel lesz érvényes. Így

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}.$$

Hasonlóan következtethetünk most a 8-tagú, majd a 16, 32-tagú egyenlőtlenségre és így tovább. Általában megmutatjuk, hogy (1)-ből következik a 2^j tagú egyenlőtlenség minden pozitív egész j-re. A bizonyítás teljes indukcióval történhet $j=1$-re feltevés szerint igaz az állítás. Legyen most $j=k$ és tegyük fel, hogy $j=k-1$-re igazoljuk, hogy az (1)-ből következik az

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{2^{k-1}})}{2^{k-1}}$$

egyenlőtlenség. Vegyünk most 2^k számú abszcisszát. Ekkor (1) és a feltétel szerint

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2^k}}{2^k}\right) =$$

$$= f\left(\frac{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}+\frac{x_{2^{k-1}+1}+x_{2^{k-1}+2}+\ldots+x_{2^k}}{2^{k-1}}}{2}\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}\right)+f\left(\frac{x_{2^{k-1}+1}+x_{2^{k-1}+2}+\ldots+x_{2^k}}{2^{k-1}}\right)}{2} \leqq$$

$$\leqq \frac{\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{2^{k-1}})}{2^{k-1}}+\frac{f(x_{2^{k-1}+1})+f(x_{2^{k-1}+2})+\ldots+f(x_{2^k})}{2^{k-1}}}{2} =$$

$$= \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{2^{k-1}})f(x_{2^{k-1}+1})+f(x_{2^{k-1}+2})+\ldots+f(x_{2^k})}{2^k}.$$

és itt ismét valahol a $<$ jel lesz az érvényes, vagyis következik az állítás helyessége k-ra is. Ezzel igazoltuk az állítás helyességét minden j értékre.

Hátra van azonban még az állítás igazolása a 2 hatványaitól különböző tagszámok esetében. Cauchy francia matematikus egy rendkívül egyszerű gondolattal fejezte be a bizonyítást: azt mutatta meg, hogy ha valamilyen tagszámra helyes az egyenlőtlenség, akkor helyes minden kisebb tagszám esetén is. Ez azon múlik, hogy a számtani középnek egyik tulajdonsága, hogy ezt hozzávéve a már meglevő számokhoz. A keletkező eggyel több szám számtani közepe ugyanaz lesz, mint az eredeti számoké volt. Valóban ha

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

akkor

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x}{n+1} = \frac{nx + x}{n+1} = x.$$

Hasonlóan, ha az eredeti számokhoz még több újat (pl. m számút) veszünk hozzá, melyek mindegyike x-szel egyenlő, akkor is változatlan marad a számtani közép:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + mx}{n+m} = \frac{nx + mx}{n+m} = x.$$

Hogyha k most tetszés szerinti pozitív egész szám és az $x_1, x_2, \ldots, x_k$ abszcisszák közt vannak különbözők, a számtani közepük pedig x, akkor keressünk 2-nek egy k-nál nagyobb hatványát, legyen ez 2^j. Legyen $l = 2^j - k$. Ekkor a mondottak és a már bizonyított egyenlőtlenség szerint

$$f(x) = f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k}\right) = f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k + lx}{2^j}\right) <$$
$$< \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_k) + lf(x)}{2^j}.$$

Innen

$$\left(1 - \frac{l}{2^j}\right) f(x) < \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_k)}{2^j}$$

és $1 - \dfrac{l}{2^j} = \dfrac{2^j - l}{2^j} = \dfrac{k}{2^j}$-vel átosztva

$$f(x) = f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_k)}{k}.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogyha egy függvényre teljesül a kéttagú szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenség, akkor teljesül minden k-ra a k tagú szimmetrikus egyenlőtlenség is.