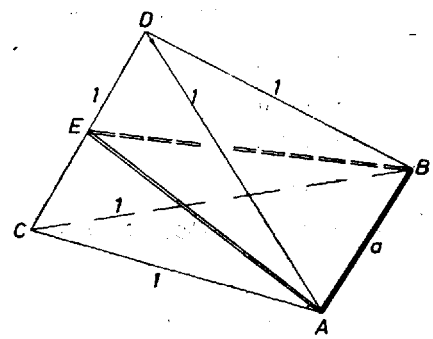
a) A $k=1$ esetben válasszuk úgy az $ABCD$ tetraéder betűzését, hogy az a egységnyi él AB legyen, és a CD él felezőpontját jelöljük E-vel. Az ACD háromszög minden oldala egységnyi, ezért $AE=\frac{\sqrt{3}}{2}$, és hasonlóan $BE=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



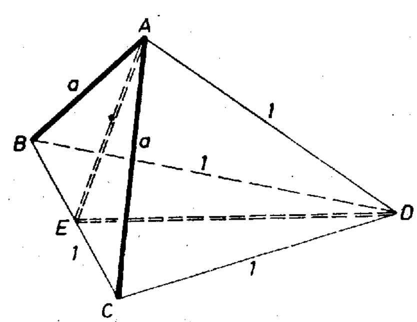
1. ábra

Az ABE háromszögben $AB<AE+BE$, vagyis (1. ábra)

(1) $$a<\sqrt{3}.$$

(1) ezek szerint szükséges feltétele a szóban forgó tetraéder létezésének. Megmutatjuk, hogy ez a feltétel elégséges is. Ha ugyanis (1) teljesül, van olyan egyenlő szárú háromszög, melynek alapja a, és szárai $\frac{\sqrt{3}}{2}$ egységnyiek. Ennek a csúcsában a síkjára merőleges egyenesre mindkét irányban $\frac{1}{2}$ egységet felmérve a kapott végpontok az alap két végpontjával együtt a kívánt tulajdonságú tetraédert határozzák meg.

b) $k=2$ mellett két esetet kell megkülönböztetnünk aszerint, hogy a két a egységnyi él csatlakozik-e egymáshoz vagy nem. Ha csatlakoznak, közös végpontjuk legyen A, másik két végpontjuk B és C, a tetraéder negyedik csúcsa D és BC felezőpontja E (2. ábra).



2. ábra

Mivel ABC egyenlő szárú háromszög, AE merőleges BC-re és az ACE háromszögben

$$a=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+AE^2}.$$

Az ADE háromszögben

$$AD=1,\ DE=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \text{így}\quad 1-\frac{\sqrt{3}}{2}<AE<1+\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$a<\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\quad (<1{,}94),$$

$$a>\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}\quad (>0{,}51).$$

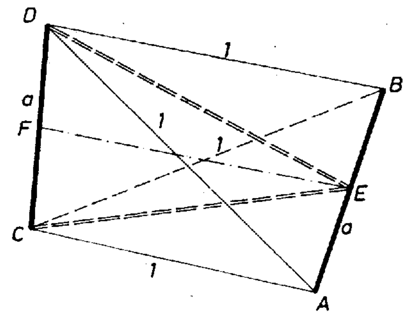
Ezek alapján ebben az esetben

(2') $$\sqrt{2-\sqrt{3}}<a<\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

a tetraéder létezésének szükséges feltétele.

Ha (2') teljesül, az egységnyi alapú és a egységnyi szárú ABC háromszög AE magasságából és az $AD = 1$, $DE = \frac{\sqrt{3}}{2}$ oldalakból háromszög szerkeszthető, ennek D csúcsát az ABC háromszög síkjára AE-ben emelt merőleges síkban elhelyezve, a kívánt tulajdonságú tetraédert kapunk.

Ha a két a egységnyi él kitérő egymáshoz képest, legyen ez a két él az AB és CD, és felezőpontjuk legyen E, ill. F (3. ábra).



3. ábra

Mivel az ABC és ABD háromszögek egyenlő szárúak, azért AB merőleges EC-re is, ED-re is, tehát AB merőleges a CDE háromszög síkjára, és hasonlóan CD merőleges az ABF háromszög síkjára. Az egymáshoz csatlakozó AE, EF, FC szakaszokra a térbeli Pitagorasz-tételt felírva kapjuk, hogy

$$1 = AC^2 = AE^2 + EF^2 + FC^2 > AE^2 + FC^2 = \frac{a^2}{2},$$

(2") $$a < \sqrt{2}$$

Ha (2") teljesül, az

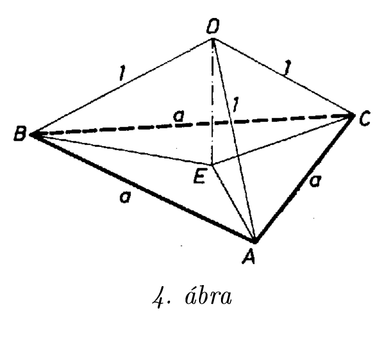
$$EF = \sqrt{1 - \frac{a^2}{2}} \quad (> 0)$$

hosszúságú EF szakaszra a végpontjaiban rá, valamint egymásra merőlegesen felvéve az a egységnyi AB, CD szakaszokat úgy, hogy felezőpontjuk E, ill. F legyen, a kapott tetraéder AC, CB, BD, DA éle a fenti meggondolás alapján egységnyi lesz, tehát (2") egyszerre szükséges és elegendő feltétele is a kívánt tetraéder létezésének, a vizsgált él-elrendezés mellett.

E két esetet összefoglalva kimondhatjuk, hogy akkor és csakis akkor van olyan tetraéder, melynek négy éle egységnyi és két éle a egységnyi, ha a a (2'), (2") feltételek közül legalább az egyiknek eleget tesz, vagyis ha

(2) $$a < \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

c) Egy tetraéder élei közül többféleképpen választhatunk ki hármat, a legegyszerűbb esetben ezek az egyik lap élei. Legyen ez a lap az ABC, D a negyedik csúcs, és az ABC lap centruma E (4. ábra).



4. ábra

Az ABC háromszög szabályos, így a tér azon pontjainak mértani helye, melyek a három csúcstól egyenlő távolságra vannak, a háromszög síkjára E-ben emelt merőleges. Ezen van a tetraéder D csúcsa is, hiszen $AD = BD = CD = 1$. Az AD szakasz vetülete e síkon AE, emiatt $AE < 1$. Az a oldalú szabályos háromszög köré írható kör sugara $AE = \frac{a}{\sqrt{3}}$, tehát $AE < 1$ csak akkor teljesülhet, ha

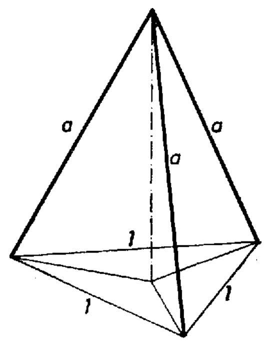
(3') $$a < \sqrt{3}.$$

Ha pedig (3') teljesül, az a oldalú szabályos ABC háromszög E centrumában emelt merőlegesre felmérve a

$$ED = \sqrt{1 - \frac{a^2}{3}}$$

szakaszt, a kapott $ABCD$ tetraéder oldalélei egységnyiek lesznek, (3') tehát elégséges is ahhoz, hogy legyen olyan tetraéder, melynek három éle egy egységnyi és három éle a egységnyi.

Ennek az elrendezésnek komplementere az, amelyben a 3 db egységnyi oldal helyezkedik el egy lapon (5. ábra).



5. ábra

Ezt az esetet azonban már nem kell részletesen tárgyalnunk, fenti eredményünk ezt is magában foglalja. Ha ugyanis az előbb azt vizsgáltuk volna, hogy milyen összefüggés áll fenn a b alapélű és c oldalélű tetraéder két meghatározó adata között, akkor fenti meggondolásunkkal a

$$b < c\sqrt{3}$$

egyenlőtlenséget kaptuk volna, (3') ennek a $b = a$, $c = 1$ esete.

Ha viszont $b = 1$ és $e = a$, akkor fenti egyenlőtlenségünkből a komplementer elrendezésre vonatkozó

(3") $$a > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

szükséges és elegendő feltételt kapjuk.

A kívánt tulajdonságú tetraéder létezéséhez tehát elégséges, ha a vagy (3')-nak vagy (3")-nak eleget tesz. Mivel tetszőleges valós szám eleget tesz e két egyenlőtlenség valamelyikének, ilyen tulajdonságú tetraéder tetszőleges a mellett létezik, csak a feladatban is kimondott

(3) $$a > 0$$

feltételnek kell teljesülnie.

d) Felesleges részletesen megvizsgálnunk a $k = 4$ esetet, hiszen legutóbbi eljárásunkkal ez visszavezethető a $k = 2$ esetre (előbb a $k = 2$ esetben mondottakat általánosítva arra az esetre, amikor két él b egységnyi, és négy él c egységnyi, majd a b, c adatokra kapott

$$b < c\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

egyenlőtlenségbe a $b = 1$, $c = a$ értékeket helyettesítve). Azt kapjuk így, hogy $k = 4$ mellett a keresett szükséges és elégséges feltétel

(4) $$a > \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

e) Végül a $k = 5$ esetre vonatkozó feltétel a $k = 1$ eset alapján hasonlóan

(5) $$a > \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ezzel az összes esetet megvizsgáltuk, feladatunk megoldását tehát befejeztük.

Megjegyzések. 1. $k = 3$ mellett van még egy elrendezési lehetőség, amelynek vizsgálata nem szerepel megoldásunkban: amikor az egyenlő hosszúságú élek egymás után csatlakoznak, de nem záródnak háromszöggé. Belátható, hogy ilyen tetraéder akkor és csak akkor létezik, ha

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} < a < \frac{\sqrt{5} + 1}{2},$$

ennek elemzésére azonban nem volt szükség, hiszen a másik két elrendezés közül legalább az egyik bármely a mellett megvalósítható. (Ennek az esetnek az önálló vizsgálata volt az 1646. feladat.[1])

2. Elég sok dolgozat a $k = 2$ eset kétféle elrendezése nyomán mintegy „kisiklott”, tovább már az összeállítási lehetőségek számát tekintette fő kérdésnek, ill. a megoldás okvetlenül végrehajtandó lépésének. Ez terjengősségre vezetett és hibalehetőségek léptek föl. Az persze kissé szerencse dolga, hogy valaki $k = 3$ esetén a szabályos gúlák esetét veszi-e előbbre, s így rájön, hogy további él-elrendezés figyelembevétele fölösleges, az 1646. feladatbeli vizsgálatra itt nincs szükség. Erre azonban akkor is rá kell jönni, ha a kevésbé szerencsés sorrendben vesszük a lehetőségeket, és az 1646. feladatbeli él-elrendezés és a kétféle szabályos gúla adta föltételeket egybevetjük. Ekkor – rájőve az előkészítés egy részének fölösleges voltára – a végleges leírásban el kell hagyni azt a részletet, bármilyen tetszetős is az.

[1] Lásd ezen számban, 109. o.