I. Jelöljük a két egyenlet közös bal oldalát $f(x)$-szel. Az addíció-tétel alkalmazásával

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}(2x+x) = \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x}{1 - \dfrac{2\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x},$$

ennek alapján (2) így alakul

$$\operatorname{tg} x + \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x(3-\operatorname{tg}^2 x)}{1-3\operatorname{tg}^2 x} = 0,$$

aminek nyilvánvalóan gyöke $\operatorname{tg} x = 0$, azaz $x_1 = 0$. (Elég lesz pl. a $-90^\circ < x < 90^\circ$ intervallumra szorítkoznunk, hiszen 180° mindhárom tagnak periódusa, így összegüknek is.) $\operatorname{tg} x$-szel egyszerűsítve és a törteket a szokásos módon eltávolítva

$$2\operatorname{tg}^4 x - 7\operatorname{tg}^2 x + 3 = 0,$$

amiből (2) további gyökei

$$\operatorname{tg}^2 x = 0{,}5 - \text{ből} \quad x_{2,3} = \pm 35{,}3^\circ, \quad \text{és} \quad \operatorname{tg}^2 x = 3 - \text{ból} \quad x_{4,5} = \pm 60^\circ$$

($x_{2,3}$ esetében elegendő $0{,}1^\circ$-ra kerekíteni, hiszen csak közelítő értékeket keresünk (2) gyökeire).

II. Áttérve (1)-re, itt $\operatorname{tg} x$-re 5-ödfokú egyenletet kapnánk, emiatt szorulunk közelítő megoldás keresésére. Mivel a tangens-függvény mindenütt növekvő, (1) gyökeit mindenütt (2) gyökeinek kis növelésével keressük.

1. $x_1 = 0^\circ$ közelében tekintsük $x^* = 1^\circ$-ot:

$$f(1^\circ) = 0{,}0175 + 0{,}0349 + 0{,}0524 = 0{,}1048 > 0{,}1.$$

Mivel a tagok aránya jó közelítéssel $1:2:3$, a 0,0048 többlet várhatóan eltűnik, ha az első tagot $0{,}0048/6 = 0{,}0008$-del csökkentjük. $\operatorname{tg} x = 0{,}0167$-ből $x = 0{,}956^\circ = 0^\circ\,57{,}3'$, és ekkor valóban $f(0{,}956^\circ) = 0{,}1002$. További finomítás a tangenstáblázat alapján nem lehetséges.

2. $f(35{,}3^\circ) = 0{,}708 + 2{,}840 - 3{,}511 = 0{,}037 = 0{,}1 - 0{,}063$, viszont $f(35{,}4^\circ) = = 0{,}711 + 2{,}872 - 3{,}442 = 0{,}1 + 0{,}041$, vagyis $0{,}1^\circ$-nyi növelés hatására $f(x)$-ben 0,104 növekedés állt be. Számunkra csak 0,063 növekedés szükséges, ezért az első közelítő értéket $0{,}1^\circ$-nak csak $0{,}063/0{,}104 = 0{,}6$ részével növeljük: $x_2 = 35{,}36^\circ$.

3. Az előzők szerint $f(-35{,}3^\circ) = -0{,}037 = 0{,}1 - 0{,}137$, viszont $0{,}2^\circ$ növeléssel $f(-35{,}1^\circ) = -0{,}703 - 2{,}778 + 3{,}655 = 0{,}1 + 0{,}074$, ezekből hasonlóan $x_3 = = -35{,}17^\circ$.

4. Az $f(60{,}5^\circ) = 0{,}1 + 0{,}029$ és $f(60{,}4^\circ) = 0{,}1 + 0{,}003$ értékekből további csökkentéssel $x_4 = 60{,}39^\circ$.

5. Végül az $f(-59{,}6^\circ) = 0{,}1 + 0{,}006$ és $f(-59{,}7^\circ) = 0{,}1 - 0{,}020$ értékpárból $x_5 = -59{,}62^\circ$.

Mindezek szerint (1) gyökeinek közelítő értéke a $-90^\circ < x < 90^\circ$ intervallumban:

$$-59{,}62^\circ, \qquad -35{,}17^\circ, \qquad 0{,}956^\circ, \qquad 35{,}36^\circ, \qquad 60{,}39^\circ.$$

Somogyi Árpád (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)

Megjegyzés. Az $x_1 = 0^\circ$ közelében levő gyök valamivel finomabban közelíthető meg, ha a tangensek táblázata helyett logaritmusuk táblázatát használjuk („lg tg”). Ugyanis az utóbbiból – a mantissza 4 tizedesjegye alapján – a tangens-függvénynek mindenütt 4 *értékes* számjegyét kaphatjuk vissza, és ez – a felhasznált 1°, 2°, 3° esetében érvényes karakterisztika: $8 - 10 = -2$ figyelembevételével – azt jelenti, hogy a tg-értékekből az ötödik tizedes jegyet is felírhatjuk (legföljebb ± 1 hibával). A tg-táblázatban közölt 4 tizedes jegy közül viszont a $(0{,}6^\circ, 5{,}7^\circ)$ intervallumban csak 3 az értékes jegyek száma. (Ez – a 45° fölötti szögek tangense közlési módjával egybevetve – kis következetlensége a táblázatnak.)

A számítás a következő:

$\lg\operatorname{tg} 1^\circ = 8{,}2419 - 10,$	$\operatorname{tg} 1^\circ = 0{,}017\,46$	$(0{,}0175),$
$\lg\operatorname{tg} 2^\circ = 0{,}5431 - 2,$	$\operatorname{tg} 2^\circ = 0{,}034\,92$	$(0{,}0349),$
$\lg\operatorname{tg} 3^\circ = 0{,}7194 - 2,$	$\operatorname{tg} 3^\circ = 0{,}052\,41$	$(0{,}0524).$

Így $f(1^\circ) = 0{,}1 + 0{,}004\,79$, a többlet 6-odrészét $\operatorname{tg} 1^\circ$-ból levonva a $\operatorname{tg} x = 0{,}016\,66$ közelítő értékkel próbálkozunk. Ennek logaritmusa $8{,}2217 - 10$, amiből $x = 0{,}9545^\circ$ (az új táblázatból $0^\circ\,57{,}28'$ alakban kapjuk; interpolálhatunk ugyanis mindkét táblázat alapján 2 jegyet is, mert a táblabeli különbség 45, ill 76 tízezred, jóval nagyobb 10-nél). Így $2x = 1{,}909^\circ$, $3x = 2{,}8635^\circ$, ezekből $\lg\operatorname{tg} 2x = 8{,}5228 - 10$, $\lg\operatorname{tg} 3x = 8{,}6991 - 10$, visszakeresve $\operatorname{tg} 2x = 0{,}033\,33$, $\operatorname{tg} 3x = 0{,}050\,01$, végül $f(0{,}9545^\circ) = 0{,}100\,00$. (A számos ki- és visszakeresés, interpolálás miatt azonban az 5. tizedesben lehet eltérés; 7-jegyű táblázattal számolva $\operatorname{tg} x = 0{,}016\,6590$.)