I. megoldás. Minden a feltevés szerinti x-re (1) két oldala értelmezve van. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. $n=1$ esetén az állítás helyes, ugyanis a $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ azonosság felhasználásával

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{2\cos^2 x}{2\sin x\,\cos x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x \tag{2}$$

Tegyük fel, hogy az állítás helyes az n-nek valamilyen j értékére, és hogy a feltételek teljesülnek $n=j+1$-re. Ekkor teljesülnek $n=j$-re is, így fennáll

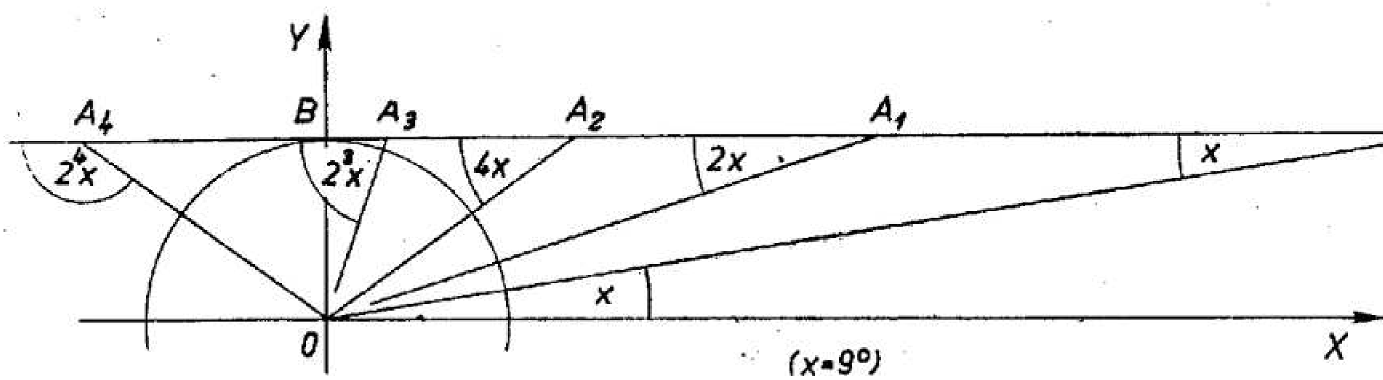
$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 2^2\cdot x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^j\cdot x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^j\cdot x. \tag{3}$$

Írjunk továbbá (2) mindkét oldalán x helyén $2^j\cdot x$-et:

$$\frac{1}{\sin 2^{j+1}\cdot x} = \operatorname{ctg} 2^j\cdot x - \operatorname{ctg} 2^{j+1}\cdot x. \tag{4}$$

Itt feltevésünk szerint mind a két oldalnak van értelme. Mármost (3) és (4) összeadásával (1)-et kapjuk, n helyén $j+1$-gyel, tehát (1) érvényessége bármely természetes szám esetéről átöröklődik az 1-gyel nagyobb szám esetére. – Ezzel az állítást igazoltuk.

Sugár László (Budapest, I. István Gimn. IV. o. t.)



II. megoldás, a $0<x<\pi/2^n$ *értékekre szorítkozva.* Mérjük föl az x, $2x$, $4x$, $\ldots$, $2^n\cdot x$ forgásszögeket a derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy az O origó közös csúcsuk, az X-tengely pozitív fele közös száruk legyen. Messe az $y=1$ egyenes (az origó körüli egységkör érintője a $B(0;1)$ pontban) a szögek másik szárát rendre az A_0, A_1, $\ldots$, A_n pontban. Ekkor, mint ismeretes, az A_i pont ($i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$) abszcisszája $\operatorname{ctg} 2^i\cdot x$-et ábrázolja, így (1) jobb oldala az A_0A_n szakasz hosszát jelenti, egyszersmind az OA_nA_0 háromszög területének kétszeresét, és az A_1, A_2, $\ldots$, A_{n-1} pontok ebben a sorrendben rajta vannak az A_0A_n szakaszon.

Az OA_i szakasz hossza viszont az OA_iB derékszögű háromszögből $1/\sin 2^i\cdot x$, az OA_i és OA_{i+1} félegyenesek közti szög $2^{i+1}\cdot x - 2^i\cdot x = 2^i x$, így az OA_iA_{i+1} háromszög területének kétszerese

$$OA_i\cdot OA_{i+1}\cdot \sin A_iOA_{i+1} = \frac{1}{\sin 2^i\cdot x}\cdot\frac{1}{\sin 2^{i+1}\cdot x}\cdot \sin 2^i\cdot x = \frac{1}{\sin 2^{i+1}\cdot x}.$$

Eszerint (1) bal oldalának tagjai rendre az OA_0A_1, OA_1A_2, $\ldots$, $OA_{n-1}A_n$ háromszög területének kétszeresét jelentik, összegük pedig a feldarabolt OA_0A háromszög területének kétszerese.

Ezzel (1)-et a tett korlátozás esetére bebizonyítottuk.

Gács Pál (Budapest, I. István g. IV. o. t.)