I. megoldás. Sem α, sem β nem derékszög, különben a föltevésnek nem volna értelme; továbbá $\operatorname{tg}\gamma/2>0$, hiszen $\gamma/2$ hegyesszög. Így (1)-et szorozva $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma/2$-vel, és tagjait a és b szerint rendezve

$$a\cos\beta\,(\cos\alpha\cos\gamma/2-\sin\alpha\sin\gamma/2)+b\cos\alpha\,(\cos\beta\cos\gamma/2-\sin\beta\sin\gamma/2)=0.$$

A zárójelekre az addíció-tételt alkalmazva látjuk, hogy egyik a másiknak -1-szerese, hiszen bennük $\alpha+\gamma/2$ és $\beta+\gamma/2$ koszinusza áll, és e két szög egymás kiegészítő szöge. A föltevés így alakul:

$$\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)(a\cos\beta-b\cos\alpha)=0,$$

ami szerint legalább az egyik teljesül a

(2) $$\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)=0,$$

(3) $$a\cos\beta=b\cos\alpha$$

egyenlőségek közül.

Mármost (2)-ből $\alpha+\gamma/2$ derékszög, így $\beta+\gamma/2$ is az, tehát (2) csak $\alpha=\beta$ esetén teljesül. (3) két oldala pedig a háromszög C-ből húzott magassága C_1 talppontjának B-től, ill. A-tól vett távolsága, s mivel a $BC_1=AC_1$ egyenlőség az AB egyenes pontjai közül csak az AB oldal felezőpontjára teljesül, ACC_1 és BCC_1 egybevágó derékszögű háromszögek, $AC=BC$. Ezek szerint az ABC háromszög mindenképpen egyenlő szárú.

Gyarmati Erzsébet (Budapest, Radnóti M. gyak. g. III. o. t.)

Megjegyzés. (3)-ból a színusz-tétel alkalmazásával is haladhatunk tovább:

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta},\quad \sin(\alpha-\beta)=0,\quad \alpha=\beta.$$

II. megoldás. (1) szimmetriája miatt választhatjuk a betűzést úgy, hogy $\alpha\geq\beta$, azaz $a\geq b$ legyen. Nem lehet α tompaszög, különben

$$90^\circ>180^\circ-\alpha=\beta+\gamma>\beta$$

miatt

$$|\operatorname{tg}\alpha|>\operatorname{tg}\beta\quad\text{s}\quad|a\operatorname{tg}\alpha|>b\operatorname{tg}\beta,$$

és (1) jobb oldala negatív lenne, holott bal oldala pozitív. Derékszög sem lehet α, mert akkor a jobb oldalnak nem lenne értelme.

Megmutatjuk, hogy a $90^\circ>\alpha>\beta$ föltevést (1)-hez csatolva ellentmondásra jutunk. Ekkor $a>b$, $\operatorname{tg}\alpha>\operatorname{tg}\beta$, így $(a-b)(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)>0$-ból kifejtéssel:

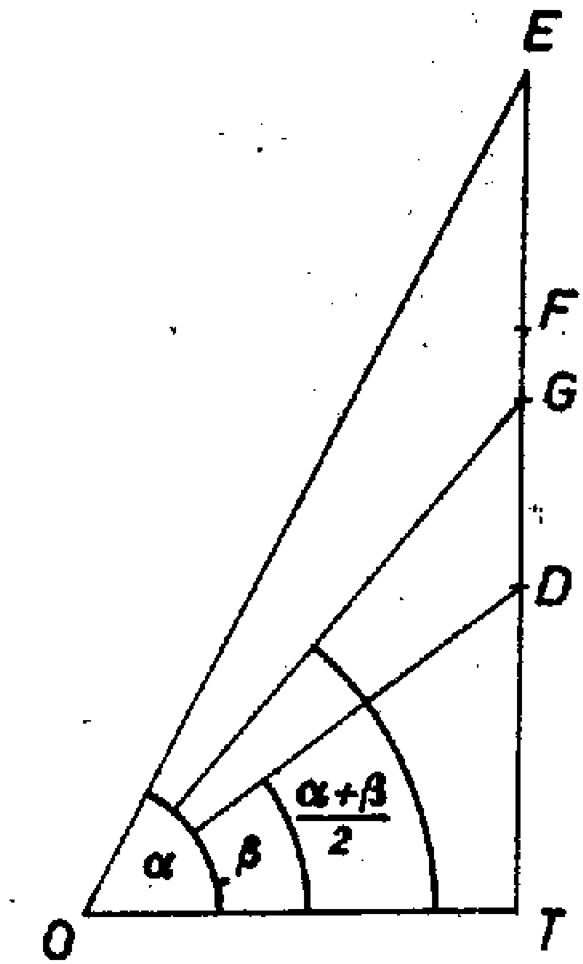
$$a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta>a\operatorname{tg}\beta+b\operatorname{tg}\alpha.$$

Adjuk hozzá mindkét oldalhoz a bal oldalt – így a jobb oldal szorzattá alakítható –, és osszuk az egyenlőtlenséget $2\operatorname{tg}(\alpha+\beta)/2$-vel. Ekkor a $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)/2=1/\operatorname{tg}(\gamma/2)$ azonosságra tekintettel a bal oldalon (1) jobb oldala áll:

$$2(a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta)>(a+b)(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta),$$
$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}(a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta)=a+b>(a+b)\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}},$$

tehát

(4) $$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}>\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2}.$$



1. ábra

Mérjük föl egy T csúcsú derékszög egyik szárára a $TO = 1$ szakaszt, majd az OT egyenes ugyanazon oldalára $TOD\sphericalangle = \beta$, $TOE\sphericalangle = \alpha$ és $TOG\sphericalangle = (\alpha+\beta)/2$ szöget, ahol D, E, G rendre az új szár metszéspontja a derékszög másik szárával. Mivel $(\alpha+\beta)/2$ ugyancsak hegyesszög, (4) szerint

$$TG > \frac{TE+TD}{2} = TF, \qquad DG > DF,$$

ahol F a DE szakasz felezőpontja. Ez azonban lehetetlen, mert $OD < OE$, így az ODE háromszögben $ODE\sphericalangle > 90^\circ$ miatt $OE > OD$, OG felezi a DOE szöget, és így

$$\frac{DG}{GE} = \frac{OD}{OE} < 1, \quad DG < GE, \quad DG < \frac{DE}{2} = DF.$$

Ezt akartuk bizonyítani. Eszerint (1) csak $\alpha = \beta$ esetén teljesülhet. Ekkor viszont teljesül is, hiszen így $\gamma/2$ pótszöge α-nak és β-nak, $\operatorname{tg}\gamma/2$ reciproka $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$-nak.

Sugár László (Budapest, I. István g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Trigonometriai azonosságok alapján bizonyítjuk, hogy (4) lehetetlen. A jobb oldal így alakítható:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\alpha\cos\beta} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}[1+\cos(\alpha+\beta)]}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)},$$

így a bal és jobb oldal különbsége, kiemeléssel

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\left(1 - \frac{1+\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}\right) = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{\cos(\alpha-\beta)-1}{2\cos\alpha\cos\beta} > 0.$$

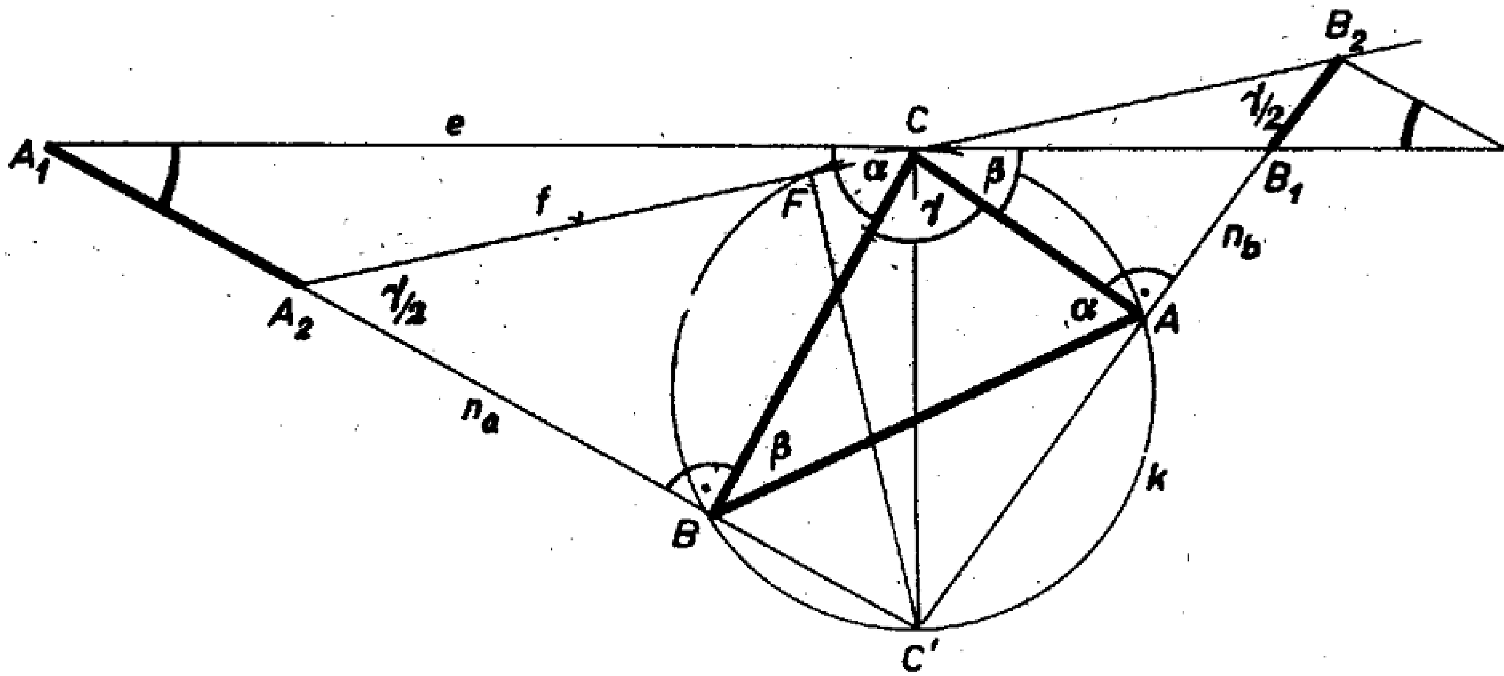
Eszerint, mivel a nevező tényezői pozitívok, $\cos(\alpha-\beta) > 1$, ami lehetetlen.

Egri Róbert (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)

III. megoldás. Felhasználjuk a II. megoldásból, hogy α és β hegyesszögek. Azt mutatjuk meg, hogy $\alpha > \beta$ esetén az (1)-ből átrendezéssel adódó

$$a\left(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\right) = b\left(\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg}\beta\right) \tag{5}$$

egyenlőség bal oldala nagyobb a jobb oldalánál.



2. ábra

Rajzoljuk meg az ABC háromszög C csúcsában a külső szög f felezőjét, és k körülírt kör e érintőjét, valamint a C-vel k-ban átellenes C' pontot A-val és B-vel összekötő n_b, ill. n_a egyenest. e és f különbözők, mert f metszi k-t, a C-t tartalmazó AB ív F felezőpontjában, ami C-től különböző (különben ugyanis $\alpha = \beta$ lenne); F az A-t nem tartalmazó BC ív pontja. C' a C-t nem tartalmazó AB ív belső pontja, különben nem állhatna α, $\beta < 90°$, n_a merőleges CB-re, n_b pedig CA-ra. Legyen n_a és n_b metszéspontja e-vel A_1, ill. B_1, f-fel A_2, ill. B_2. Fennáll

$$A_1CB\sphericalangle = \alpha, \quad B_1CA\sphericalangle = \beta, \quad C'A_2B_2\sphericalangle = C'B_2A_2\sphericalangle = \gamma/2,$$

utóbbiak azért, mert $C'A_2B_2$ egyenlő szárú háromszög, ugyanis C'-nél levő szögét felezi a $C'F$ egyenes, és A_2B_2 oldala merőleges erre, továbbá a C'-nél levő szöge $180° - \gamma$.

A keletkezett derékszögű háromszögek felhasználásával

$$A_1A_2 = A_1B - A_2B = a\left(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\right)$$
$$B_1B_2 = B_2A - B_1A = b\left(\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg}\beta\right),$$

azaz (5) bal, ill. jobb oldala. Messe a B_2-n átmenő, n_a-val párhuzamos egyenes f-et B'-ben. Ekkor $A_1A_2 > B'B_2$, ugyanis CA_1A_2 és $CB'B_2$ hasonló háromszögek, és bennük $CA_2 > CB_2$, mert – mint láttuk – F felezi A_2B_2-t, és C az FB_2 szakasz belső pontja. Másrészt $B_1B_2 < B'B_2$, mert a B_1B_2B' háromszög velük szemben fekvő szögeire

$$B_1B'B_2\sphericalangle = CA_1B\sphericalangle = 90° - \alpha < 90° - \beta = B'B_1B_2\sphericalangle.$$

Így valóban $A_1A_2 > B_1B_2$, amit bizonyítani akartunk.

Azt viszont hogy $\alpha = \beta < 90°$ esetén teljesül (1), a II. megoldásban beláttuk.