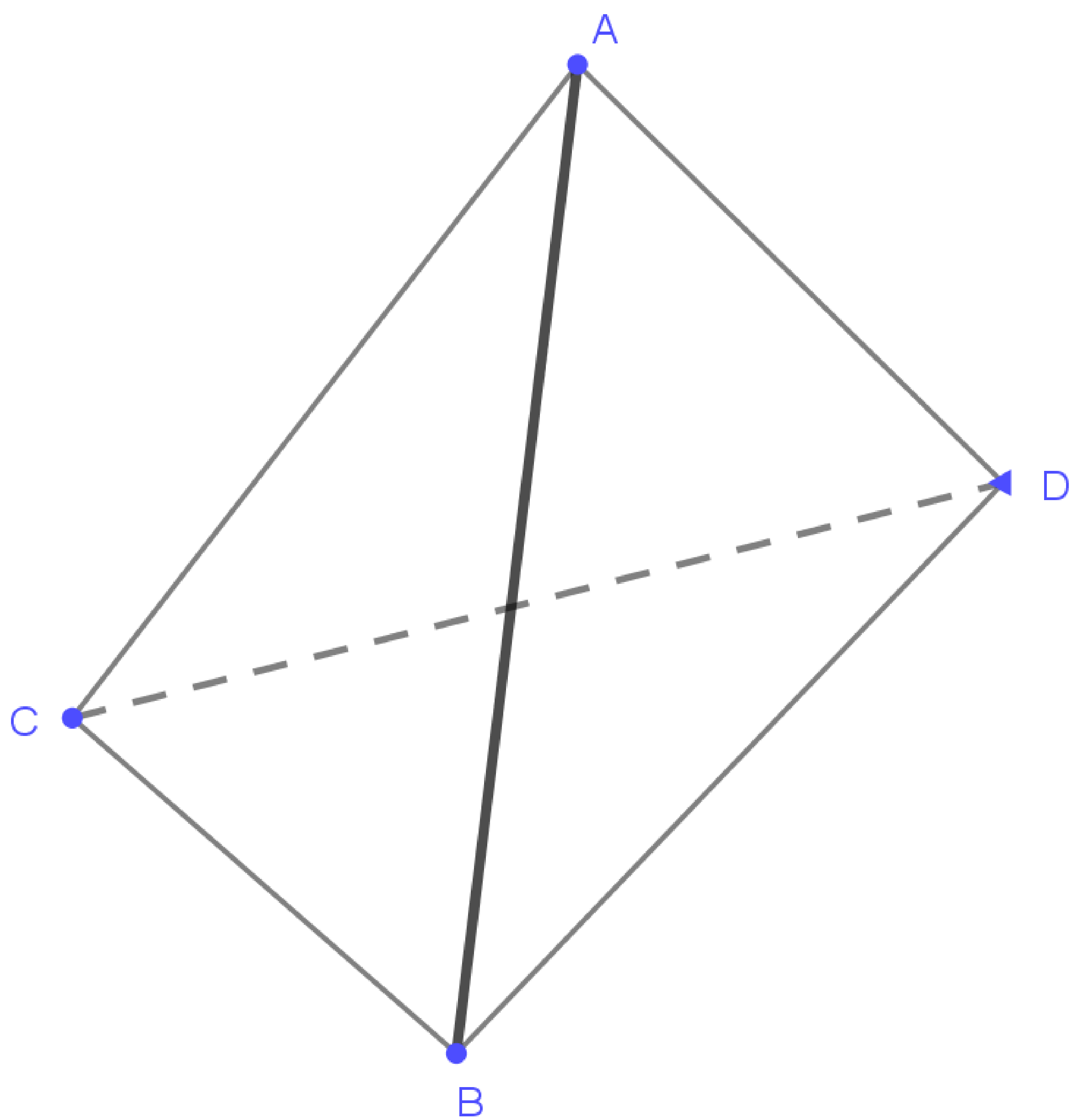
Legyenek a tetraéder csúcsai A, B, C, D és AB a leghosszabb éle vagy a leghosszabbak egyike. Megmutatjuk, hogy ennek valamelyik végpontjából induló 3 élből szerkeszthető háromszög.

Három távolságból akkor szerkeszthető háromszög, ha a legnagyobb is kisebb a másik kettő összegénél, hiszen a másik kettő már külön-külön is legfeljebb akkora lehet, mint a legnagyobb, tehát kisebb a másik két távolság összegénél.



Ha a tetraéder A-ból induló éleiből szerkeszthető háromszög, akkor állításunk helyes. Ha nem, ez csak úgy lehet, hogy

$$AB \geqq AC + AD. \tag{1}$$

Viszont az ABC és ABD háromszögekből

$$AB < AC + CB \quad \text{és} \quad AB < AD + DB.$$

A kettőt összeadva és (1)-et felhasználva

$$2AB < AC + CB + AD + DB \leqq AB + CB + DB,$$

vagyis

$$AB < CB + DB,$$

ez pedig azt jelenti, hogy az AB, CB, DB élekből szerkeszthető háromszög, mivel egyik él sem hosszabb AB-nél.

Prőhle Tamás (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Lehetséges, hogy a tetraédernek csak egyetlen csúcsából induló éleiből szerkeszthető háromszög, pl. ha az egyik lap szabályos háromszög és a többi él mindegyike a szabályos háromszög oldalának legalább kétszerese.

2. Nem használtuk fel a bizonyításban, hogy $AB \geqq CD$, tehát azt láttuk be, hogy ha a tetraéder egy éle nem kisebb a végpontjaiból induló élek egyikénél sem, akkor valamelyik végpontjából induló élekből szerkeszthető háromszög.