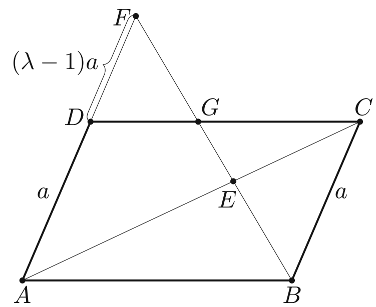
Legyen $AD = BC = a$ és $AF = \lambda \cdot a$. Így

$$DF = (\lambda - 1) \cdot a.$$



Az AFE és CBE háromszögek hasonlók, mert megfelelő oldalaik párhuzamosak (illetve egymás meghosszabbításai). A hasonlósági arány $\dfrac{AF}{BC} = \dfrac{\lambda a}{a} = \lambda$. Ebből következően $\dfrac{FE}{BE} = \lambda$, amiből

$$\frac{BF}{BE} = \frac{BE + EF}{BE} = \lambda + 1, \quad \text{tehát} \quad \frac{1}{BE} = \frac{\lambda + 1}{BF}.$$

Az FAB és FDG háromszögek szintén hasonlók, mert megfelelő oldalaik párhuzamosak. A hasonlósági arány

$$\frac{GF}{BF} = \frac{DF}{AF} = \frac{(\lambda - 1)a}{\lambda a} = \frac{\lambda - 1}{\lambda},$$

amiből

$$\frac{BG}{BF} = \frac{BF - GF}{BF} = \frac{\lambda - (\lambda - 1)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{tehát} \quad \frac{1}{BG} = \frac{\lambda}{BF}.$$

A fentieket a bizonyítandó $\dfrac{1}{BE} = \dfrac{1}{BG} + \dfrac{1}{BF}$ egyenlőségbe behelyettesítve:

$$\frac{\lambda + 1}{BF} = \frac{\lambda}{BF} + \frac{1}{BF}.$$

Mivel $BF \neq 0$, ez valóban igaz.

Fraknói Ádám (Jedlik Ányos Gimn., Budapest, 12. évf.) dolgozata alapján